

Feuille d'exercices numéro 4

Exercice 1. Soit E, F des espaces finis (ou dénombrables). Soit Q noyau de transition de E dans E (pour tout $x \in E$, $Q(x, \cdot)$ est une loi de probabilité sur E). Le noyau Q est supposé irréductible et apériodique. Soit K noyau de transition de E dans F (pour tout $x \in E$, $K(x, \cdot)$ est une loi de probabilité sur F). On suppose que pour tout $(x, y) \in E \times F$, $K(x, y) > 0$. On dispose de $Z : E \times F \rightarrow \mathbb{R}^+$ et on note, pour tout $x \in E$, $\sum_{u \in F} Z(x, u)K(x, u) = z(x)$. On s'intéresse à la chaîne de Markov suivante dans $E \times F$.

- $X_0 = x_0 \in E$ (quelconque), $U_0 \sim K(x_0, \cdot)$.
- Si on a $(X_n, U_n) \in E \times F$.
 - On tire $X_{n+1}^* \sim Q(X_n, \cdot)$ et $V_{n+1} \sim \mathcal{U}([0; 1])$ (indépendant de tout le reste). On tire $U_{n+1}^* \sim K(X_{n+1}^*, \cdot)$.
 - On calcule

$$\alpha(X_n, U_n, X_{n+1}^*, U_{n+1}^*) = \inf \left(1, \frac{Z(X_{n+1}^*, U_{n+1}^*)Q(X_{n+1}^*, X_n)}{Z(X_n, U_n)Q(X_n, X_{n+1}^*)} \right).$$

- Si $V_{n+1} \leq \alpha(X_n, U_n, X_{n+1}^*, U_{n+1}^*)$ alors $X_{n+1} = X_{n+1}^*$. Sinon $X_{n+1} = X_n$.
- (1) On remarque que pour tout $(x, y) \in E \times F$, $(x', y') \mapsto Q(x, x')K(x', y')$ définit une mesure de probabilité sur $E \times F$ (on a bien $\sum_{x' \in E} \sum_{y' \in F} Q(x, x')K(x', y') = 1$). On notera $\bar{Q}((x, y), \cdot)$ cette mesure. Montrer que \bar{Q} est un noyau de Markov irréductible sur $E \times F$.
- (2) Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ converge en loi vers une loi proportionnelle à z .

Exercice 2. Soient p et q des probabilités sur E (espace fini) avec $\forall x, 0 < p(x) \leq cq(x)$ où c constante > 0 . On prend des variables Y_n i.i.d. de loi q , indépendantes de X_0 . On définit par récurrence une chaîne (X_n) :

- On tire X_0 suivant q .
- Quand on a X_n , on tire $U_n \sim \mathcal{U}([0, 1])$ indépendamment de toutes les autres variables et :

$$X_{n+1} = \begin{cases} Y_{n+1} & \text{si } U_n \leq \frac{p(Y_{n+1})}{cq(Y_{n+1})} \\ X_n & \text{sinon} \end{cases}.$$

- (1) Montrer que (X_n) est une chaîne de Markov.
- (2) Calculer la probabilité de transition $P(x, y)$ de (X_n) .
- (3) Calculer μP pour une probabilité μ . En déduire que la loi de X_n converge vers une unique probabilité invariante égale à p .
- (4) Quel rapport y-a-t-il entre cette chaîne et une méthode de rejet classique ?

Exercice 3. On se place sur $E = \mathbb{N}$. Soit q loi sur E telle que $q(x) = q(-x)$. Soit p une loi telle que $p(x) > 0, \forall x$. On définit une chaîne de Markov (X_n) par :

- $X_0 \sim p$
- On tire $U_n \sim \mathcal{U}([0, 1])$ indépendante de toutes les autres variables et Z_n de loi q indépendante de toutes les autres variables. On pose $Y_n = X_n + Z_n$ et :

$$X_{n+1} = \begin{cases} Y_n & \text{si } U_n \leq \inf \left(1, \frac{p(Y_n)}{p(X_n)} \right) \\ X_n & \text{sinon} \end{cases}.$$

- (1) Montrer que (X_n) est une chaîne réversible.

- (2) Soit $\pi(x) = \frac{1}{Z} \exp(-\beta H(x))$ une loi sur E (où H est une fonction, β une constante quelconque et Z est la constante de normalisation). Comment approcher $\int_E f(x)\pi(dx)$ à l'aide d'un algorithme de Métropolis ?

Exercice 4. Couplage.

On suppose que l'on a un noyau de Markov irréductible Q sur un espace E fini (ou dénombrable) et π probabilité sur E telle que $\pi Q = \pi$. On suppose qu'il existe une probabilité λ sur E et $\epsilon > 0$ tels que $\forall x, y \in E$,

$$\epsilon \lambda(y) \leq Q(x, y) .$$

On construit deux chaînes de Markov (X_n) et (Y_n) par :

- On tire X_0 suivant π et Y_0 (indépendamment de X_0) suivant π' .
- Si on a tiré X_0, \dots, X_n et Y_0, \dots, Y_n , on tire $U_n \sim \mathcal{U}([0, 1])$ indépendamment de toutes les autres variables.
 - Si $U_n \leq \epsilon$, on tire $X_{n+1} = Y_{n+1}$ suivant λ .
 - Sinon
 - * Si $X_n = Y_n$, on tire $X_{n+1} = Y_{n+1}$ suivant la loi $\frac{1}{1-\epsilon}(Q(X_n, \cdot) - \epsilon \lambda(\cdot))$ (c'est bien une loi de probabilité).
 - * Sinon on tire X_{n+1} suivant $Q(X_n, \cdot)$ et Y_{n+1} suivant $Q(Y_n, \cdot)$ (indépendamment).

(1) Montrer que (X_n) et (Y_n) sont des chaînes de Markov de transition Q .

(2) Montrer que pour presque tout ω , $\exists n$ tel que $X_n(\omega) = Y_n(\omega)$.

(3) On rappelle que $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_k) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} \sum_{x \in E} f(x)\pi(x)$. Montrer que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(Y_k) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} \sum_{x \in E} f(x)\pi(x) .$$