M1 IM - Méthodes de Monte-Carlo

`http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Corrigé du partiel 1 (durée : 3h), sujet A

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1.

(1) Nous avons $G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $G(x) = 0$ si $x \leq 1$ et pour $x \geq 1$:

$$G(x) = \int_1^x \frac{1}{t^2}dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{x}\,.$$

Rappelons que $G : \mathbb{R} \mapsto [0;1]$ et que le pseudo inverse G^{-1} est défini sur $[0;1]$. Donc le pseudo-inverse G^{-1} vérifie

$$\forall u \in [0;1[\,,\; G^{-1}(u) = \frac{1}{1-u}\,,$$

et, si on suit la définition du cours, $G^{-1}(1) = +\infty$.

(2) On sait que si $U \sim \mathcal{U}([0;1])$ alors $G^{-1}(U)$ est de loi de densité g. Donc le code suivant renvoie une variable aléatoire de loi de densité g.

```
tirer U de loi uniforme sur [0;1];
X=1/(1-U);
renvoyer X;
```

Exercice 2.

(1) Étudions (pour $x \geq 1$) $\beta(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2\exp(-x^3)}{Z}$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \beta'(x) &= (2x - 3x^4)\frac{e^{-x^3}}{Z} \\ &= x(2-3x^4)\frac{e^{-x^3}}{Z}\,. \end{aligned}$$

Nous remarquons que $\beta'(x) \leq 0$ pour $x \geq 1$. Donc $\forall x \geq 1$, $\beta(x) \leq \beta(1) = \frac{\exp(-1)}{Z}$.

(2)
```
b=0;
tant que (b=0) répéter
          tirer X de loi de densité g;
          tirer U de loi uniforme sur [0;1];
          si U*exp(-1)*(1/X^2)/Z<exp(-X^3) alors
                    b=1;
fin de la boucle
renvoyer X;
```

Le théorème du cours sur la méthode du rejet et le résultat de la question précédente nous disent que la variable renvoyée par cet algorithme est de loi de densité f.