M1 IM - Méthodes de Monte-Carlo
`http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Corrigé du partiel 1 (durée : 1h30), sujet B

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1.

(1) Étudions $\beta(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\pi}{2Z}(1+x^2)\exp(-x^4/4)$ (pour $x\geq 0$). Nous avons :

$$\begin{aligned}\beta'(x) &= \frac{\pi}{2Z}(2x-x^3(1+x^2))\exp\left(-\frac{x^4}{4}\right)\\ &= \frac{\pi}{2Z}x(2-x^2-x^4)\exp\left(-\frac{x^4}{4}\right)\\ &= \frac{\pi}{2Z}x(1-x^2)(2+x^2)\exp\left(-\frac{x^4}{4}\right).\end{aligned}$$

Nous avons donc le tableau de variation

x	0		1		$+\infty$
$\beta'(x)$		$+$		$-$	
$\beta(x)$		$\nearrow$	$\frac{\pi}{Z}\exp\left(-\frac{1}{4}\right)$	$\searrow$	

TABLE 1. tableau de variation

Donc $f(x)\leq\frac{\pi}{Z}\exp\left(-\frac{1}{4}\right)g(x)$ pour tout $x\geq 1$.

(2)

```
b=0;
tant que (b=0) répéter
        tirer X de loi de densité g;
        tirer U de loi uniforme sur [0;1];
        si U*2/(Z*(1+X^2))<exp(-X^4/4)/Z alors
                b=1;
fin de la boucle
renvoyer X;
```

Le théorème du cours sur la méthode du rejet et le résultat de la question précédente nous disent que la variable renvoyée par cet algorithme est de loi de densité f.

Exercice 2.

(1) Nous avons pour tout $x\in\mathbb{R}$, $H(x)=\int_{-\infty}^{x}h(t)dt$ donc :

$$H(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\leq 0\,,\\ \frac{x^2}{2} & \text{si } x\in[0;1]\,,\\ 1-\frac{(2-x)^2}{2} & \text{si } x\in[1;2]\,,\\ 1 & \text{si } x\geq 2\,.\end{cases}$$

Et donc

$$H^{-1}(u)=\begin{cases}\sqrt{2u} & \text{si } u\in[0;1/2]\,,\\ 2-\sqrt{2-2u} & \text{si } u\in[1/2;1]\,.\end{cases}$$

(2) On sait que si $U \sim \mathcal{U}([0;1])$ alors $H^{-1}(U)$ est de loi de densité h. Donc le code suivant renvoie une variable aléatoire de loi de densité h.

```
tirer U de loi uniforme sur [0;1];
si U<1/2 alors
        X=sqrt(2*U);
sinon
        X=2-sqrt(2-2*U);
renvoyer X;
```