

## Partiel 2 (durée : 1h30), sujet B

*Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants.*

### Exercice 1.

- (1) Montrer que  $f : x \mapsto \frac{2}{3} \frac{\mathbb{1}_{[0;1]}(x)}{x^{1/3}}$  est une densité de probabilité.
- (2) Calculer  $F$  la fonction de répartition de  $f$ .
- (3) Calculer le pseudo-inverse de  $F$ .
- (4) Écrire un programme (en  $\mathbf{R}$  ou pseudo-code) qui simule une variable aléatoire de densité  $f$ . Justifier ce programme.

**Exercice 2.** On veut calculer  $p_l = \mathbb{P}(X \in [1/(l+1); 1/l])$  pour  $X$  une variable de densité  $f$  définie dans l'exercice précédent et  $l > 0$ .

- (1) (a) Proposer une méthode de Monte-Carlo pour calculer  $p_l$ .  
(b) Calculer la variance de cette méthode.
- (2) (a) Proposer une méthode d'échantillonnage préférentiel (par exemple : telle que les nouveaux tirages soient tous dans  $[1/(l+1); 1/l]$ ).  
(b) Calculer la variance de cette méthode.
- (3) Comparer les variances des deux méthodes quand  $l \rightarrow +\infty$ .