Université de Nice - L1 AES - Analyse
http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html

CORRIGÉ DE LA FEUILLE DE TD n$^{\text{o}}$ 1
(VERSION LONGUE)

Exercice 1.

(1) On commence par utiliser la définition du $\log_2$:

$$\frac{\ln(x)}{\ln(2)} = -4\,,$$

puis on multiplie par $\ln(2)$ des deux côtés :

$$\ln(x) = -4\ln(2)\,,$$

puis on prend l'exponentielle :

$$x = \exp(-4\ln(2))\,,$$

puis on utilise les propriétés de l'exponentielle et du logarithme :

$$x \quad = \quad \exp(-4\ln(2)) = (\exp(\ln 2))^{-4} = 2^{-4} = \frac{1}{16}\,.$$

(2) On commence par utiliser la définition du $\log_{10}$:

$$\frac{\ln(x^2-1)}{\ln(10)} + 1 = 2\frac{\ln(x)}{\ln(10)}\,,$$

puis les propriétés du logarithme :

$$\frac{\ln(x^2-1)}{\ln(10)} + 1 = \frac{\ln(x^2)}{\ln(10)}\,,$$

puis on soustrait $\ln(x^2)/\ln(10)$ des deux cotés :

$$\frac{\ln(x^2-1)-\ln(x^2)}{\ln(10)} = -1\,,$$

puis les propriétés du logarithme (on multiplie d'abord par $\ln(10)$ des deux côtés :

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) &= -\ln(10) \\ \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) &= \ln(1/10)\,, \end{aligned}$$

puis on prend l'exponentielle :

$$\begin{aligned} \frac{x^2-1}{x^2} &= \frac{1}{10} \\ x^2-1 &= x^2/10 \\ x^2(1-1/10) &= 1 \\ x &= \sqrt{\frac{10}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{3}\,. \end{aligned}$$

(3) On commence par utiliser la définition de la puissance d'un nombre

$$\begin{aligned} 2^{x+1} &= 3^x \\ \exp((x+1)\ln(2)) &= \exp(x\ln(3))\,, \end{aligned}$$

puis on prend le logarithme :

$$\begin{aligned} x(\ln(2)-\ln(3)) &= -\ln(2) \\ x &= -\frac{\ln(2)}{\ln(2)-\ln(3)}\,. \end{aligned}$$

Exercice 2.

(1) On commence par utiliser la définition de la puissance : $f(x) = \exp(x\ln(2))$. Puis on dérive l'exponentielle et on réutilise la définition de la puissance (dans l'autre sens) $f'(x) = \ln(2) \times \exp(x\ln(2)) = \ln(2) \times 2^x$.

(2) On utilise la définition du $\log_2$: $g(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$, $g'(x) = \frac{1}{\ln(2)} \times \frac{1}{x}$.

Exercice 3.

(1) On dérive comme un produit (en utilisant la dérivée du ln) $f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)\times\ln(x)+\frac{1}{x}\times\frac{1}{x}$ donc

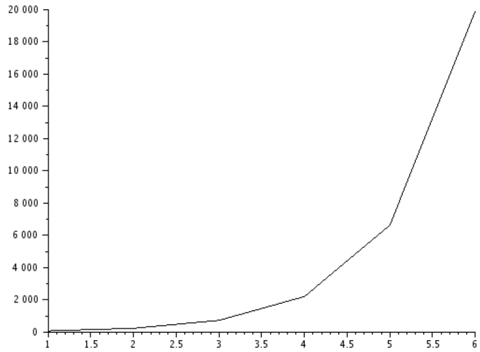
$$\epsilon(f)(x) = x\left(-\frac{\ln(x)}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)\frac{x}{\ln(x)} = -1+\frac{1}{\ln(x)}\,.$$

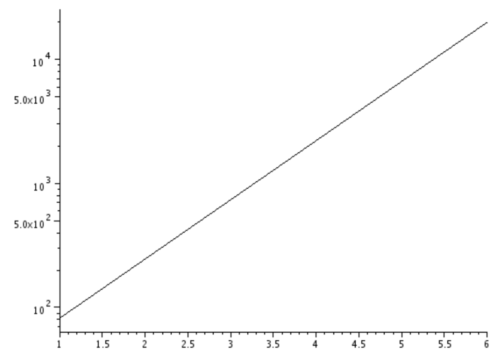
(2) On commence par utiliser la définition de la puissance : $g(x) = \exp(x\ln(x))$; puis on dérive en utilisant la règle de dérivation pour les fonctions composées (ici, nous avons exp de quelque chose) $g'(x) = \left(1\times\ln(x)+x\times\frac{1}{x}\right)\exp(x\ln(x))$ donc

$$\epsilon(f)(x) = x\,(\ln(x)+1)\exp(x\ln(x)) \times \frac{1}{\exp(x\ln(x))} = x\,(\ln(x)+1)\ .$$

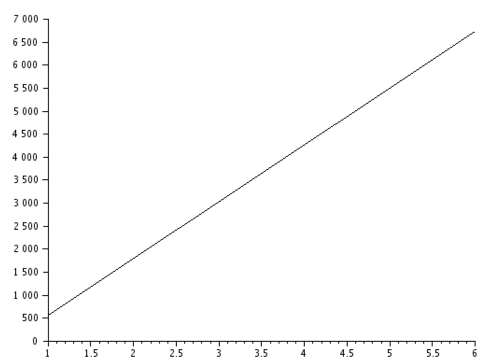
Exercice 4.

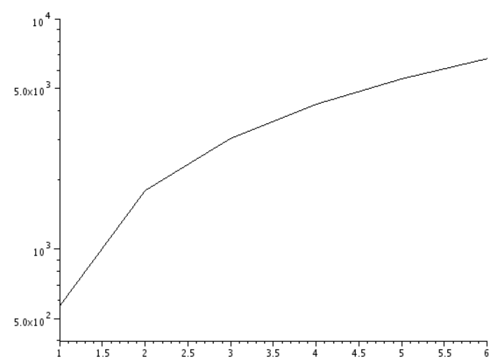
(1) Produit A :





Pour tracer le graphe avec l'échelle logarithmique en ordonnée, on utilise le $\log_{10}$ de la quantité en ordonnée. Par exemple : (année=1,produit A=82) donne le point d'abscisse 1 et d'ordonnée $\log_{10}(82) = 1,91$.
Produit B :





(2) Croissance exponentielle pour A, croissance linéaire pour B. On remarque que la suite $b_1 = 567$, $b_2 = 1801$, $\ldots$ de la production du produit B est arithmétique de raison 1234 ($b_{n+1} - b_n = 1234$ pour tout $n \in \{1, 2, \ldots, 5\}$) donc on peut écrire : $b_n = b_1 + (n-1) \times 1234$ pour tout $n \in \{1, 2, \ldots, 6\}$. On remarque que la suite $a_1 = 82$, $a_2 = 246$, $\ldots$ de la production du produit B est géométrique de raison 3 ($a_{n+1}/a_n = 3$ pour tout $n \in \{1, 2, \ldots, 5\}$) donc on peut écrire : $a_n = a_1 \times 3^{n-1}$ pour tout $n \in \{1, 2, \ldots, 6\}$.