Université de Nice - L1 AES - Analyse

http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html

CORRIGÉ DE LA FEUILLE DE TD n$^{\text{o}}$ 3

Exercice 1. Nous avons $\int(x^5-x+1)dx = \frac{x^6}{6}-\frac{x^2}{2}+x+C$ (avec C une constante). Remarques : Nous utilisons ici les primitives des fonctions puissances vues en cours. Cette écriture veut dire que toutes les fonctions $x\mapsto \frac{x^6}{6}-\frac{x^2}{2}+x+C$ avec C constante sont des primitives de la fonction $x\mapsto x^5-x+1$.
$\int_0^1(x^5-x+1)dx = \left[\frac{x^6}{6}-\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1$ (nous plaçons entre les crochets n'importe quelle primitive de $x\mapsto x^5-x+1$)$=\left(\frac{1^6}{6}-\frac{1^2}{2}+1\right)-\left(\frac{0^6}{6}-\frac{0^2}{2}+0\right)=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+1=\frac{1-3+6}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

Exercice 2. La fonction $x\mapsto u^\alpha(x)u'(x)$ ressemble à une dérivée de fonction composée (remarque : $u^\alpha(x)=(u(x))^\alpha$). Nous avons $\left((u(x))^{\alpha+1}\right)'=(\alpha+1)u'(x)(u(x))^\alpha$. Donc $\int u^\alpha(x)u'(x)dx=\frac{u^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}+C$ (si $\alpha\neq-1$) (avec C une constante). Dans le cas particuler $\alpha=-1$: $u^\alpha(x)u'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$ et $\int\frac{u'(x)}{u(x)}dx=\ln(u(x))+C$ (avec C une constante).

(1) $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}}=\int u^{-1/2}(x)u'(x)dx$ avec $u(x)=x+1$ donc $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}}=\frac{(x+1)^{1/2}}{(1/2)}+C=2\sqrt{x+1}+C$ (avec C une constante).

(2) $\int\frac{dx}{3x+1}=\frac{1}{3}\int\frac{3}{3x+1}dx=\frac{1}{3}\int\frac{u'(x)}{u(x)}dx$ avec $u(x)=3x+1$ donc $\int\frac{dx}{3x+1}=\frac{1}{3}\ln(3x+1)+C$ $(\dots)$.

(3) $\int\frac{xdx}{(x^2+1)^4}=\frac{1}{2}\int\frac{u'(x)}{u(x)^4}dx$ avec $u(x)=x^2+1$ donc $\int\frac{xdx}{(x^2+1)^4}=\frac{1}{2}\frac{(x^2+4)^{-3}}{(-3)}+C=-\frac{1}{6(x^2+1)}+C$.

Exercice 3.

(1) $\int xe^{-x}dx=x\times(-e^{-x})-\int 1\times(-e^{-x})dx+C$ (formule d'intégration par parties du cours avec $u(x)=x$, $v(x)=-e^{-x}$) donc $\int xe^{-x}dx=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx+C=-xe^{-x}-e^{-x}+C$ (toujours à une constante près C).

(2) Formule d'intégration par parties du cours (avec $u(x)=x^2$, $v(x)=x\ln(x)-x$, $v'(x)=\ln(x)$)

$$\begin{aligned}\int x^2\ln(x)dx &= x^2\times(x\ln(x)-x)-\int 2x\times(x\ln(x)-x)dx+C\\ &= x^3\ln(x)-x^3-2\int x^2\ln(x)dx+\int 2x^2dx+C\end{aligned}$$

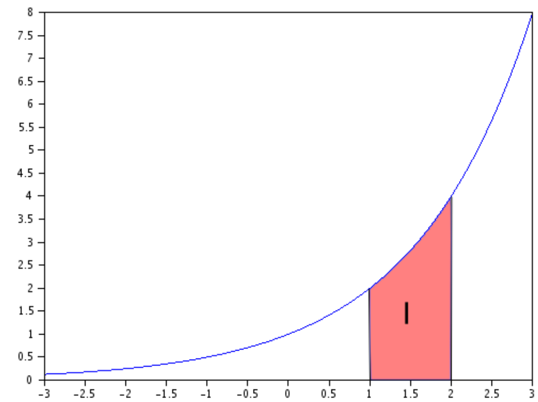
donc

$$\begin{aligned}3\int x^2\ln(x)dx &= x^3\ln(x)-x^3+\int 2x^2dx+C\\ \int x^2\ln(x)dx &= \frac{x^3}{3}\ln(x)-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{9}x^3+C=\frac{x^3}{3}\ln(x)-\frac{x^3}{9}+C\,.\end{aligned}$$

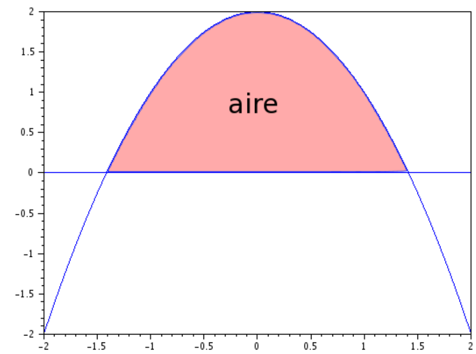
<u>Autre méthode</u> : (avec $u(x)=\ln(x)$, $v(x)=x^3/3$, $u'(x)=1/x$, $v'(x)=x^2$)

$$\begin{aligned}\int x^2\ln(x)dx &= \frac{x^3}{3}\ln(x)-\int\frac{x^3}{3}\frac{1}{x}dx+C\\ &= \frac{x^3}{3}\ln(x)-\int\frac{x^2}{3}dx+C\\ &= \frac{x^3}{3}\ln(x)-\frac{x^3}{9}+C\,.\end{aligned}$$

Exercice 4. $I = \int_1^2 2^x dx = \int_1^2 \exp(x\ln(2))dx = \left[\frac{\exp(x\ln(2))}{\ln(2)}\right]_1^2 = \frac{\exp(2\ln(2))}{\ln(2)} - \frac{\exp(1\ln(2))}{\ln(2)} = \frac{2^2-2^1}{\ln(2)} = \frac{2}{\ln(2)}$. La quantité I est l'aire entre sous la courbe entre 1 et 2 (comme sur le graphique).



Exercice 5. Les points d'intersection sont $(\sqrt{2}, 0)$ et. $(-\sqrt{2}, 0)$. L'aire cherchée est donc $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 2 - x^2 dx = \left[2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \left(2\sqrt{2} - \frac{(\sqrt{2})^3}{3}\right) - \left(-2\sqrt{2} - \frac{(-\sqrt{2})^3}{3}\right) = 4\sqrt{2} - \frac{2}{3}(\sqrt{2})^3 = \sqrt{2}\left(4 - \frac{4}{3}\right) = \frac{8\sqrt{2}}{3}$



Exercice 6. On dessine les courbes pour $x > 0$ (il n'y a pas d'intersection dans les $x \leq 0$). Les points d'intersection sont d'abscisse x telle que $\frac{2}{x} = 3 - x$, c'est à dire $x^2 - 3x + 2 = 0$. Les solutions de ce trinôme sont $\{1, 2\}$. Les points d'intersection sont donc $(1, 2)$ et $(2, 1)$. L'aire recherchée est donc $\int_1^2 3 - x - \frac{2}{x} dx = \left[3x - \frac{x^2}{2} - 2\ln(x)\right]_1^2 = \left(3 \times 2 - \frac{2^2}{2} - 2\ln(2)\right) - \left(3 \times 1 - \frac{1^2}{2} - 2\ln(1)\right) = \frac{3}{2} - 2\ln(2)$.