M1 IM, université Nice Sophia Antipolis
Séries temporelles
Sylvain Rubenthaler
http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html

# Feuille d'exercices no 4

1. Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On cherche

$$(\widehat{a}, \widehat{b}) = \underset{(a,b)\in\mathbb{R}^2}{\arg\min} F(a,b) \text{ , avec } F(a,b) := \sum_{t=1}^{n} (x_t - a - bt)^2 .$$

   (a) Trouver les points critiques de $F$.

   Formules à savoir par cœur :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} , \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

   (b) Montrer que l'unique point critique est un minimum absolu de $F$.

2. Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels. Soit $T \in \mathbb{R}$. Soit $\Delta : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto \Delta P(X) = P(X) - P(X-T)$.

   (a) Montrer que $\deg(\Delta P) \leq \deg(P) - 1$.

   (b) On suppose que $\Delta^{k-1} P \neq 0$. Montrer que $\deg(P) \geq k$.

3. Les processus $(X_k)$ suivants sont stationnaires (au sens de la définition no 2). Le processus $(\epsilon_n)_{n\geq 0}$ est un bruit blanc de variance $\sigma^2$ et de moyenne nulle.

   (a) Quelle est la fonction d'auto-covariance du processus auto-régressif de représentation

$$X_n - \frac{1}{2} X_{n-1} = \epsilon_n \, ?$$

   (b) On considère le processus auto-régressif de représentation

$$X_n - \frac{5}{6} X_{n-1} + \frac{1}{6} X_{n-2} = \epsilon_n .$$

   Donner les valeurs de $\sigma(0)$ et $\sigma(1)$. Trouver les racines du polynôme $1 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}z^2$ et en déduire l'expression de $\sigma(h)$ pour $h \geq 1$.

   (c) On considère le processus auto-régressif de représentation

$$X_n - X_{n-1} + \frac{1}{2} X_{n-2} = \epsilon_n.$$

   Donner les expressions de $\sigma(0)$ et $\sigma(1)$. Trouver les racines du polynôme $1 - z - \frac{1}{2}z^2$ et en déduire que

$$\rho(h) = 2^{-h/2} \left( \cos\left(\frac{h\pi}{4}\right) + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{h\pi}{4}\right) \right) , \forall h \geq 0 .$$

4. Soit le processes $AR_1$ (centré) suivant

$$X_t = aX_{t-1} + \epsilon_t$$

   où $\epsilon_t$ est un bruit blanc centré de variance $\sigma^2$.

(a) Quelle condition doit-on imposer sur $a$ pour que ce processus soit stationnaire ?

(b) Calculer la variance de ce processus.

(c) Montrer que l'auto-covariance d'un tel processus est

$$\sigma(h) = \sigma^2 \frac{a^h}{1 - a^2} \, .$$

(d) En déduire la décroissance vers 0 de l'auto-covariance lorsque $h \to +\infty$.

(e) Calculer l'auto-corrélation partielle.

5. Soit le processus $ARMA_{1,1}$ défini par $X_t + aX_{t-1} = \epsilon_t + a\epsilon_{t-1}$ (avec $(\epsilon_t)$ bruit blanc centré de variance $\sigma^2$). Est-ce un processus stationnaire ? Existe-t-il une écriture plus simple de ce processus ?

6. Considérons le processus $X_t = aX_{t-1} + \epsilon_t + b\epsilon_{t-1}$ (avec $(\epsilon_t)$ bruit blanc centré de variance $\sigma^2$).

(a) Montrer que $\sigma(0) = \sigma^1 \times \frac{1+b^2+2ab}{1-a^2}$, $\sigma(1) = \sigma^2 \times \frac{a+b+ab^2+a^2b}{1-a^2}$.

(b) En déduire $\rho(1) = \frac{(a+b)(1+ab)}{b^2+2ab+1}$, $\rho(h) = a^{h-1}\rho(1)$.