

Examen (durée : 2h)

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. Soit (x_1, x_2, \dots, x_n) une série temporelle ($n \geq 1$). Soient $\alpha \in]0; 1[$. Calculer

$$(\hat{a}_1, \hat{a}_2) = \arg \min_{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2} \sum_{j=0}^{n-1} (1 - \alpha)^j (x_{n-j} - (a_1 + a_2 j))^2.$$

(On demande de faire une démonstration similaire à celle du cours.)

Exercice 2. Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus $ARCH(p)$ de coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p \geq 0$ (donc supposé stationnaire). On admet que les $W_t = X_t^2 - \sigma_t^2$ forment un bruit blanc. Pour tout t , on note $\mathcal{J}_t = \{X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\}$.

Montrer les formules suivantes (On demande de faire une démonstration du cours et on suppose $\sum_{i=1}^p \alpha_i \neq 1$.)

$$\text{pour tout } t : \mathbb{E}(X_t) = 0, \mathbb{E}(X_t | \mathcal{J}_{t-1}) = 0, \mathbb{V}(X_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i} \text{ (si } \sum_{i=1}^p \alpha_i = 0),$$

$$\mathbb{V}(X_t | \mathcal{J}_{t-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p X_{t-p}^2, \text{ Cov}(X_t, X_{t+h}) = 0 \text{ (si } h > 0),$$

$$\text{Cov}(X_t, X_{t+h} | \mathcal{J}_{t-1}) = 0$$

Exercice 3. On considère un processus auto-régressif $(X_n)_{n \geq 0}$ d'ordre 2 satisfaisant :

$$(0.1) \quad X_n + \frac{X_{n-2}}{2} = \epsilon_n$$

(pour $n \geq 2$, avec des (ϵ_n) indépendants et identiquement distribués, de loi $\mathcal{N}(0, 1)$).

- (1) Montrer qu'il existe un processus stationnaire satisfaisant la relation (0.1) ci-dessus (on pourra utiliser un théorème du cours). (Rappel : un tel processus est centré.) Dans la suite, on suppose que (X_n) est stationnaire et vérifie (0.1).
- (2) Soit σ la fonction d'auto-covariance de $(X_n)_{n \geq 0}$. Calculer $\sigma(0)$, $\sigma(1)$ (écrire les résultats sous forme de fraction rationnelle réduite).
- (3) Calculer $\sigma(h)$ pour tout $h \geq 2$.
- (4) Calculer la densité spectrale de la série (X_n) .

Exercice 4. On s'intéresse au processus ARMA stationnaire (X_t) vérifiant l'équation de récurrence

$$X_t - \sum_{i=1}^3 a_i X_{t-i} = \epsilon_t + \sum_{i=1}^2 b_i \epsilon_{t-i}$$

avec (ϵ_t) un bruit blanc et $a_1 = 0, 2$; $a_2 = 0, 4$; $a_3 = 0, 3$; $b_1 = 0, 5$; $b_2 = 0, 2$.

- (1) Donner une instruction R permettant de simuler une trajectoire de (X_t) pour t entre 1 et 100. Notons \mathbf{x} le résultat obtenu.
- (2) Donner des instructions R permettant de tracer le périodogramme de \mathbf{x} .
- (3) On suppose que le périodogramme obtenu est celui de la figure (0.1). Que nous dit ce graphique sur la composante périodique de (X_t) ?

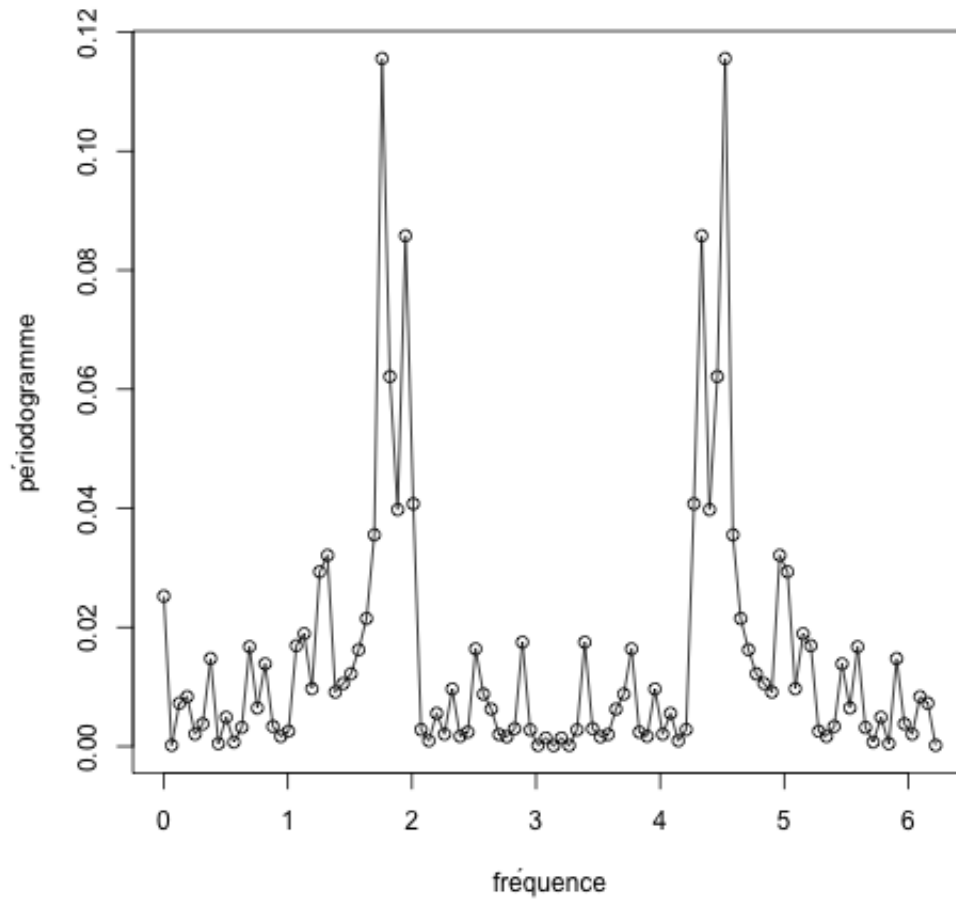


FIGURE 0.1. Périodogramme