M1 IM - Méthodes de simulation stochastique (Monte-Carlo), 2014-2015
`http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Corrigé du contrôle no 2, sujet A (durée : 3h)

Documents, téléphones et calculatrices interdits. La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. On n'a pas tenu compte dans la correction des erreurs de syntaxe en R.

Exercice 1.

(1) On peut écrire $I = \int_0^{1/2} \frac{1}{2\sqrt{x}\log(x)} \times 2\mathbb{1}_{[0;1]}(x)dx$. On voit donc que si $X_1, X_2, \dots$ sont i.i.d. de loi $\mathcal{U}([0;1/2])$ alors (puisque $\mathbb{E}(|1/(\sqrt{X_1}\log(X_1))|) < \infty$ car $1/(\sqrt{x}\log(x)) \leq 1/\sqrt{x}$ au voisinage de 0 et $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x}}dx < \infty$), par la loi des grands nombres,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{X_i}\log(X_i)} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} I\,.$$

On peut aussi écrire $I = \int_0^1 \frac{1}{8x^{3/2}\log(x)} \times 8x\mathbb{1}_{[0;1]}(x)dx$. On voit que si $Y_1, Y_2, \dots$ sont i.i.d. de loi de densité $x \mapsto 2x\mathbb{1}_{[0;1]}(x)$ (c'est bien une densité de probabilité), alors (puisque $\mathbb{E}(|1/(Y_1^{3/2}\log(Y_1))|) < \infty$, c'est toujours la même intégrale), par la loi des grands nombres,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{8Y_i^{3/2}\log(Y_i)} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} I\,.$$

(2) Voir le programme 1 (on utilise la première méthode).

Algorithme 1 Boucle de Monte-Carlo

```
s=0
n=1000
for (i in 1:n)
{
  u=runif(1,0,0.5)
  s=s+1/(2*sqrt(u)*log(u))
}
print(s/n)
```

(3) On remarque que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\frac{1}{2X_1(\log(X_1))^2}\right) &= \int_0^{1/2} \frac{1}{4x(\log(x))^2} \times 2dx \\ \text{(changement de variable } t = \log(x)) &= \int_{-\infty}^{\log(1/2)} \frac{1}{2t^2}dt\end{aligned}$$

est finie. Le théorème central-limite nous dit que l'erreur

$$I - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{X_i}\log(X_i)}$$

est (approximativement) une gaussienne Z de variance σ^2/n. Nous voulons

$$\mathbb{P}(|Z| > 0,01) \leq 0,05\,,$$

c'est à dire

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sqrt{n}Z}{\sigma}\right| > \frac{\sqrt{n}}{\sigma}0,01\right) \leq 0,05\,.$$

En utilisant les symétries de la gaussienne, nous voyons que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sqrt{n}Z}{\sigma}\right| > \frac{\sqrt{n}}{\sigma}0,01\right) = 2\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}Z}{\sigma} > \frac{\sqrt{n}}{\sigma}0,01\right) .$$

Comme $\sqrt{n}Z/\sigma$ est de loi $\mathcal{N}(0;1)$, nous voyons dans la table qu'il suffit de prendre n tel que

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}0,01 \geq 1,96 ,$$

c'est à dire

$$n \geq \left(\frac{1,96\sigma}{0,01}\right)^2 .$$

Exercice 2.

(1) On calcule la fonction de répartition G associée à g. Si $x \leq 0$, $G(x) = 0$. Si $x > 0$,

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_0^x \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}} dt \\ \text{(changement de variable } u = \sqrt{t}) &= \int_0^{\sqrt{x}} e^{-u} du \\ &= \left[-e^{-u}\right]_0^{\sqrt{x}} \\ &= 1 - e^{-\sqrt{x}} . \end{aligned}$$

Nous pouvons donc simuler une variable de densité g en utilisant l'inverse de la fonction de répartition. Nous avons

$$y = 1 - e^{-\sqrt{x}} \text{ avec } x > 0 \,,\, y \in [0;1] \Leftrightarrow x = \frac{1}{(\log(1-y))^2} \text{ avec } x > 0 \,,\, y \in [0;1] .$$

Nous en déduisons que le programme 2 répond à la question.

Algorithme 2 Simulation de variable aléatoire

```
u=runif(1,0,1)
x=-1/(log(1-u))^2
print(x)
```

(2) Pour tout $x > 0$, comme $\sqrt{x} \leq x + 1$

$$f(x) \leq \frac{e^{-\sqrt{x}}}{Z\sqrt{x}} = \frac{2e}{Z} \times g(x) .$$

La formule est encore vraie pour $x \leq 0$.

(3) Nous utilisons la technique d'échantillonage d'importance pour simuler suivant la loi de densité f (voir programme 3). Remarquons que pour $x > 0$,

$$\frac{f(x)}{(2/Z)g(x)} = \exp(-x + \sqrt{x}) .$$

Exercice 3.

Algorithme 3 Simulation de variable aléatoire

```
b=0
while (b==0)
{
  u=runif(1,0,1)
  x=-1/(log(1-u))^2
  v=runif(1,0,1)
  if (v<exp(-x+sqrt(x)))
  {
    b=1
  }
print(x)
```

(1) Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(g(X)|X \in D_i) &= \frac{\mathbb{E}(g(X)\mathbb{1}_{D_i}(X))}{\mathbb{E}(\mathbb{1}_{D_i}(X))} \\ &= \frac{\int_{i-1}^{i} x^2 \frac{e^{-x}}{1-e^{-3}} dx}{\int_{i-1}^{i} \frac{e^{-x}}{1-e^{-3}} dx} \\ &= \int_{i-1}^{i} x^2 \frac{e^{-x}}{1-e^{-3}} dx \times \left(\frac{e^{-(i-1)} - e^{-i}}{1-e^{-3}}\right)^{-1} .\end{aligned}$$

(2) L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne

$$\left(\sum_{i=1}^{3} p_i \mathbb{E}(g(X)|X \in D_i)\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{3} p_i \mathbb{E}(g(X)|X \in D_i)^2 .$$

C'est à dire

$$\left(\sum_{i=1}^{3} \int_{i-1}^{i} \frac{x^2 \exp(-x)}{1-\exp(-3)} dx\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{3} \left(\int_{i-1}^{i} x^2 \frac{e^{-x}}{1-e^{-3}} dx\right)^2 \left(\frac{e^{-(i-1)} - e^{-i}}{1-e^{-3}}\right)^{-1} .$$

Exercice 4.

(1) La fonction ψ est paire donc il suffit de montrer que $\sum_{n \geq 0} \psi(n) < \infty$. Nous avons $n^2\psi(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (parce que l'exponentielle est la plus forte). Donc, par théorème de comparaison, $\sum_{n \geq 0} \psi(n) < \infty$.

(2) Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $Q(x, x+1) = Q(x+1, x) = Q(x, x-1) = Q(x-1, x) = 1/2$ et si $y \in \mathbb{Z} \backslash \{x-1, x+1\}$, alors $Q(x, y) = Q(y, x) = 0$. Donc Q est symétrique. Pour tous x et y dans $\mathbb{Z}$, avec par exemple $x < y$,

$$Q(x, x+1)Q(x+1, x+2) \dots Q(y-1, y) > 0 .$$

Donc Q est irréductible.

(3) Voir l'algorithme 4 (dans lequel on affiche les valeurs de la chaîne au fur et à mesure).

(4) La loi π_0 est telle que $\pi_0(x) > 0$ pour tout x donc, par théorème du cours, nous savons que la chaîne de Metropolis est irréductible, de loi invariante π_0. Un autre théorème du cours nous dit que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(Y_i) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} \int_{\mathbb{Z}} f(x)\pi_0(dx)$$

(la fonction f est bien π_0-intégrable puisqu'elle est bornée).

Algorithme 4 Metropolis

```
n=1000
x=0
print(x)
for (i in 1:n)
{
  u=runif(1,0,1)
  if (u<1/2)
  {
    y=x+1
  }
  else
  {
    y=x-1
  }
  v=runif(1,0,1)
  if (v<exp(-sqrt(y)+sqrt(x)))
  {
    y=x
  }
  print(y)
}
```