M1 IM - Méthodes de simulation stochastique (Monte-Carlo), 2014-2015

`http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Contrôle no 2, sujet B (durée : 3h)

Documents, téléphones et calculatrices interdits. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses (il faut en particulier justifier les programmes). Les exercices sont indépendants. On ne tiendra pas compte dans la correction des erreurs de syntaxe en **R** *.*

Exercice 1. à On s'intéresse à $I = \int_2^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x(\log(x))^2} dx$.

(1) Donner deux manières de calculer I (de manière) approchée par une méthode de Monte-Carlo.

(2) Écrire en R un programme appliquant une des deux méthodes ci-dessus. On notera σ^2 la variance de la méthode.

(3) Trouver un nombre de boucles n (qui s'écrit comme une fonction de σ^2) telle que la méthode ci-dessus approche I à $0,02$ près avec une probabilité $\geq 0,99$ (il n'est pas nécessaire de simplifier l'expression trouvée).

Exercice 2.

(1) Soit la densité de probabilité $g\,:\,x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{1}_{]1;+\infty[}(x) \times 1/(x(1+\log(x))^2)$. Écrire en R un code qui permet de simuler une variable aléatoire de densité g.

(2) Soit
$$f\,:\,x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{1}_{]1;+\infty[}(x) \times \inf(\log(x),1)/(Zx(1+(\log(x))^2))\,,$$
avec $Z = \int_1^{+\infty} \inf(\log(x),1)/(x(1+(\log(x))^2))dx$. Trouver une constante C telle que $f(x) \leq Cg(x)$ pour tout x.

(3) Écrire en R un programme qui simule une variable aléatoire de loi de densité f.

Exercice 3. Soit $f\,:\,\mathbb{R}^2 \to [0;+\infty[$ une densité de probabilité. Soit $g\,:\,\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (telle que $\int_{\mathbb{R}^2} g(x,y)f(x,,y)dxdy$ est bien définie). Soient
$$m(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy\,,\; h(x) = \frac{1}{m(x)} \int_{\mathbb{R}} g(x,y)f(x,y)dy\,.$$
Soit (X,Y) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, de densité f.

(1) Montrer que $\mathbb{E}(h(X)) = \mathbb{E}(g(X,Y))$ (on demande de refaire une démonstration du cours).

(2) Montrer que $\mathbb{E}(h(X)^2) \leq \mathbb{E}(g(X,Y)^2)$ (on demande de refaire une démonstration du cours).

Exercice 4. Soit $\mathcal{S}_{10}$ l'ensemble des vecteurs $(r_1, r_2, \dots, r_{10})$ avec $\{r_1, r_2, \dots, r_{10}\} = \{0,1,\dots,9\}$, c'est à dire les vecteurs de taille 10 dont les composantes sont des éléments de $\{0,1,\dots,9\}$ et pour lesquels chaque nombre de $\{0,\dots,9\}$ apparaît exactement une fois dans les composantes. Par exemple : $(2,3,7,6,8,9,0,1,4,5) \in \mathcal{S}_{10}$. Soit Q un noyau de transition sur $\mathcal{S}_{10}$ défini par
$$Q((r_1,\dots r_{10}),(s_1,\dots,s_{10})) = \frac{1}{10}$$
s'il existe i dans $\{0,2,\dots,9\}$ tels que $r_k = s_k$ pour $k \in \{0,\dots,9\}\backslash\{i,(i+1)[10]\}$ [1]et $s_{(i+1)[10]} = r_i$, $s_i = r_{(i+1)[10]}$; et
$$Q((r_1,\dots r_{10}),(s_1,\dots,s_{10})) = 0$$

1. Rappel : $k[10]$ est le reste de la division euclidienne de k par 10

sinon. On remarque que cette transition est la transition qui échange deux coordonnées successives au hasard. Soit $M : \mathcal{S}_{10}^2 \to \mathbb{R}_+$. Soit $(c(1), c(2), \dots, c(N)) \in \{0, 1, \dots, 9\}^N$ (N est un entier quelconque). Soit

$$\psi : (r_1, \dots, r_{10}) \in \mathcal{S}_{10} \mapsto \prod_{i=1}^{N-1} M(r_{c(i)}, r_{c(i+1)}) \,.$$

Soit $Z = \sum_{x \in \mathcal{S}_{10}} \psi(x)$.

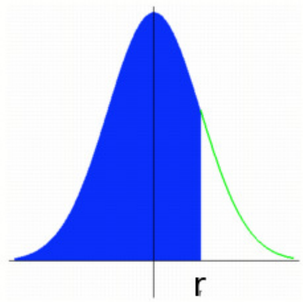
(1) Montrer que Z est finie.

(2) Montrer que Q est irréductible et symétrique.

(3) Soit π_0 loi sur $\mathcal{S}_{10}$ telle que $\pi_0(x) = \psi(x)/Z$ pour tout x. Écrire en `R` un algorithme de Metropolis de proposition Q et de loi cible π_0. On notera (Y_n) la chaîne de Metropolis.

(4) Soit f une fonction $\mathcal{S}_{10}$ dans $\mathbb{R}$. Proposer une méthode de Monte-Carlo pour calculer $\int_{\mathcal{S}_{10}} f(x)\pi_0(dx)$ de manière approchée.

$P(X \leq r)$ *avec* $X \sim N(\mathbf{0{,}1})$



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

FIGURE 0.1. Table de la loi normale