M1 IM - Séries temporelles - 2015-2016
`http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Corrigé du contrôle no 3, sujet A (durée 2h)

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. Pour qu'il existe un processus stationnaire satisfaisant la relation, il suffit que le polynôme

$$A(X) = 1 - a_1X - a_2X^2 - a_3X^3$$

n'ait que des racines de module > 1. Le polynôme

$$A(X) = \frac{1}{12}(2-X)^2(3+X)$$

a bien des racines de module > 1 (ses racines sont $\{2; -3\}$), et son terme constant est 1. Nous dévoppons :

$$\begin{aligned} A(X) &= \frac{1}{12}(2-X)(6-X-X^2) \\ &= \frac{1}{12}(12-8X-X^2+X^3)\,. \end{aligned}$$

Donc, si $a_1 = 2/3$, $a_2 = 1/12$, $a_3 = -1/12$, il existe un processus (X_t) satisfaisant la relation de récurrence voulue.

Exercice 2. (1) Nous avons

$$\sigma(0) = \mathbb{E}(X_tX_t) = \frac{9}{16}\sigma(0) + \frac{1}{64}\sigma(0) + 1 - \frac{3}{16}\sigma(1)\,,$$

et

$$\sigma(1) = \mathbb{E}(X_tX_{t-1}) = \frac{3}{4}\sigma(0) - \frac{1}{8}\sigma(1)\,,$$

d'où

$$\sigma(1) = \frac{2}{3}\sigma(0)\,.$$

Nous reportons cette égalité dans la première équation et nous obtenons

$$\sigma(0) = \frac{9}{16}\sigma(0) + \frac{1}{64}\sigma(0) + 1 - \frac{1}{8}\sigma(0)\,,$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(0)}{64}(64-36-1+8) &= 1 \\ \sigma(0) &= \frac{64}{35}\,, \end{aligned}$$

$$\sigma(1) = \frac{128}{105}\,.$$

(2) Le polynôme caractéristique de la relation de récurrence est

$$Q(X) = X^2 - \frac{3}{4}X + \frac{1}{8} = \left(X - \frac{1}{2}\right)\left(X - \frac{1}{4}\right)\,,$$

de racines $\{1/2; 1/4\}$. Donc σ vérifie

$$\sigma(h) = \frac{a}{2^h} + \frac{b}{4^h}\,,$$

avec deux coefficients a et b à déterminer. Comme nous connaissons $\sigma(0)$ et $\sigma(1)$, nous avons le système

$$\begin{cases} a + b &= \frac{64}{35} \\ \frac{a}{2} + \frac{b}{4} &= \frac{128}{105}\,. \end{cases}$$

D'où

$$\frac{1}{4}b = \frac{64}{35} \times \frac{1}{2} - \frac{128}{105} = \frac{64}{35}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) = \frac{64}{35} \times \frac{(-1)}{6} = \frac{-32}{35 \times 3},$$
$$b = -\frac{128}{105},$$
$$a = \frac{64}{35} + \frac{64 \times 2}{35 \times 3} = \frac{64}{35}\left(1 + \frac{2}{3}\right) = \frac{64}{35} \times \frac{5}{3} = \frac{320}{105}.$$

Donc, pour tout h,

$$\sigma(h) = \frac{320}{105}\left(\frac{1}{2}\right)^h - \frac{128}{105}\left(\frac{1}{4}\right)^h.$$

Exercice 3. (1) `n=100; model=list(ar=c(0.1,-0.2,0.5),ma=c(0.1,0.2,0.2));`
`x=arima.sim(model,n)`

(2) `P=abs(fft(x)/n)^2;Fr=(0:(n-1))*2*pi/n`
`plot(Fr,P,type='o',xlab='frequence',ylab='periodogramme')`

(3) On observe un pic en fréquence autour de 2. Ce qui correspond à la période $2\pi/2 \approx 3$. Le mode vers 0 (correspondant donc à une période infinie) n'a pas de signification.

Exercice 4. Voir l'algorithme 1.

Algorithme 1 Programme

```
p=1; q=0
out<-arima(x,order=c(p,0,q))
min=out$aic
for (i in 1:2)
{
 for (j in 0:2)
 {
  if (j<i+1)
  {
   out<-arima(x,order(i,0,j))
   if (out$aic<min)
   {
    p=i;q=j;min=out$aic
   }
  }
 }
}
cat("paramètres minimisant le critère AIC : p =",p,", q =",q)
```