M1 IM - Séries temporelles - 2015-2016
`http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Contrôle no 3, sujet A (durée 2h)

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. Soit $(\epsilon_t)_{t\geq 0}$ une suite de bruits blancs centrés. Trouver a_1, a_2, a_3 dans $\mathbb{R}$ tels que : $a_3 \neq 0$ et il existe un processus stationnaire $(X_t)_{t\geq 0}$ vérifiant la relation de récurrence

$$X_t = a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + a_3 X_{t-3} + \epsilon_t \text{ , pour } t \geq 3 \,.$$

Exercice 2. Soit $(\epsilon_t)_{t\geq 0}$ une suite de bruits blancs centrés, de variance 1. Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus stationnaire vérifiant la relation de récurrence

$$X_t = \frac{3}{4} X_{t-1} - \frac{1}{8} X_{t-2} + \epsilon_t \text{ , pour } t \geq 2 \,.$$

Soit σ la fonction d'auto-covariance de $(X_t)_{t\geq 0}$.

(1) Calculer $\sigma(0)$, $\sigma(1)$.

(2) Calculer $\sigma(h)$ pour tout h dans $\mathbb{N}$.

Exercice 3. On s'intéresse au processus $ARMA$ stationnaire $(X_t)_{t\geq 0}$ vérifiant la relation de récurrence

$$X_t - \sum_{i=1}^{3} a_i X_{t-i} = \epsilon_t + \sum_{i=1}^{3} b_i \epsilon_{t-i} \text{ (pour } t \geq 3) \text{ ,}$$

où les (ϵ_t) forment un bruit blanc et $a_1 = 0,1$; $a_2 = -0,2$; $a_3 = 0,5$; $b_1 = 0,1$; $b_2 = 0,1$; $b_3 = 0,2$.

(1) Donner des instructions en `R` permettant de simuler une trajectoire de (X_t) pour t entre 1 et 100. Notons `x` le résultat obtenu.

(2) Donner des instructions en `R` permettant de tracer le périodogramme de (X_t).

(3) On suppose que le périodogramme obtenu est celui de la figure (0.1). Que nous dit ce graphique sur la composante périodique de (X_t) ?

Exercice 4. Soit `x` une série temporelle de longueur `n`. On cherche à ajuster un modèle $ARMA_{p,q}$ sur `x`. Écrire un programme `R` qui trouve le couple (p, q) minimisant le critère AIC parmi les couples de la liste suivante : $\{(1,0); (1,1); (2,0); (2,1); (2,2)\}$.

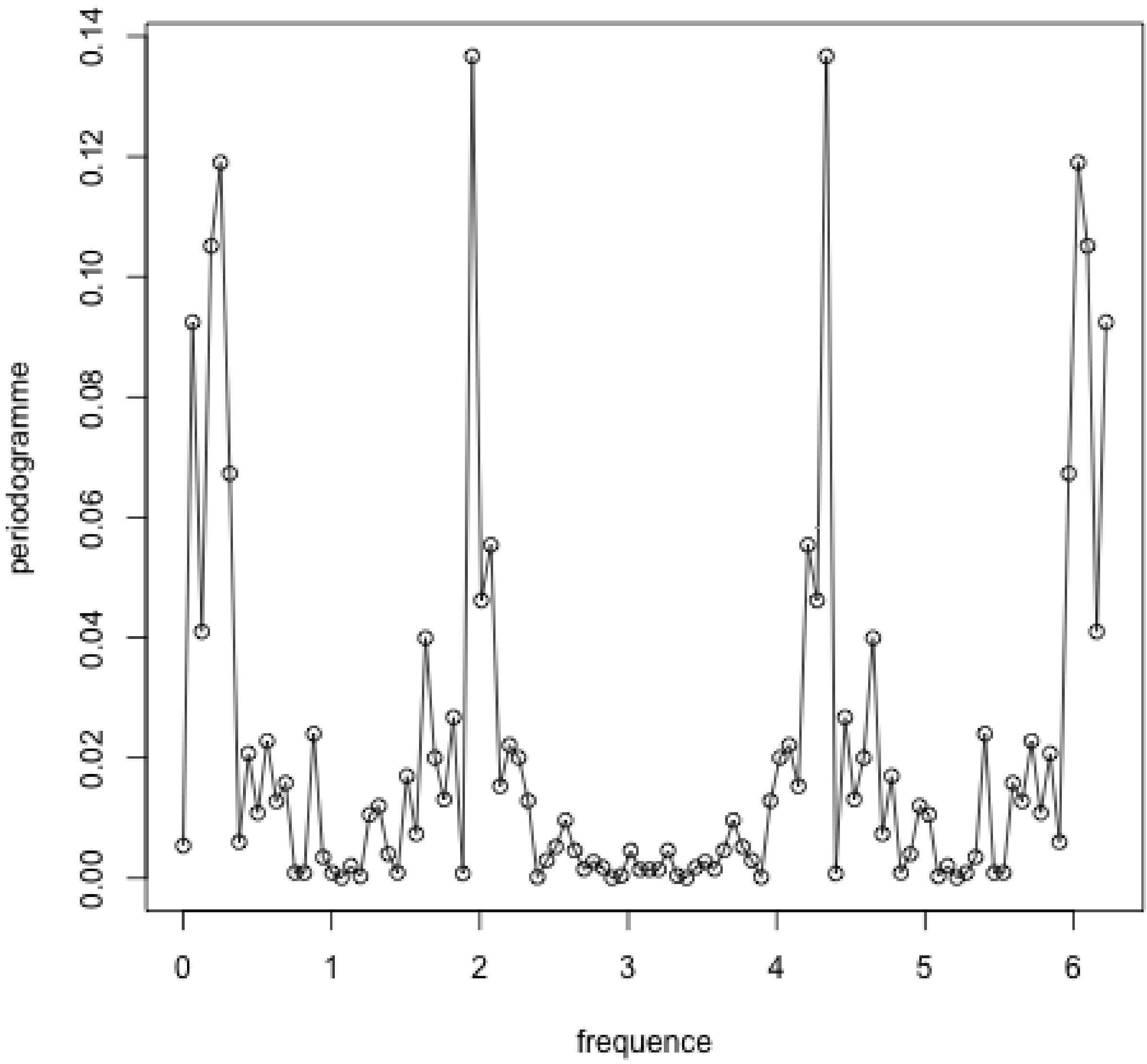

FIGURE 0.1. Périodogramme