M1 IM - Séries temporelles - 2015-2016
http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html

Corrigé du contrôle no 3, sujet B (durée 2h)

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. (1) Nous avons : $A(0) = 1 > 0$, $A(1) = -1 < 0$ donc (par continuité de la fonction $x \mapsto A(x)$), il existe une racine de A dans $]0;1[$. Donc on ne peut pas appliquer le critère du cours sur l'existence d'un processus stationnaire vérifiant la relation voulue.

(2) C'est la relation de récurrence d'un processus $ARMA$. Il existe toujours un processus stationnaire vérifiant une telle relation de récurrence.

Exercice 2. Calculons, pour tout λ (on utilise que σ est paire)

$$\begin{aligned}
f(\lambda) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{h=-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda h}\frac{1}{2^h} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(1+\sum_{h\geq 1}\frac{e^{-i\lambda h}}{2^h}+\sum_{h\geq 1}\frac{e^{i\lambda h}}{2^h}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(1+\frac{e^{-i\lambda}}{2}\times\frac{1}{1-(e^{-i\lambda}/2)}+\frac{e^{i\lambda}}{2}\times\frac{1}{1-(e^{i\lambda}/2)}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(1+\frac{1}{2}\times\frac{e^{-i\lambda}(1-e^{i\lambda}/2)+e^{i\lambda}(1-e^{-i\lambda}/2)}{1+1/4-\cos(\lambda)}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(1+\frac{1}{2}\times\frac{2\cos(\lambda)-1}{\frac{5}{4}-\cos(\lambda)}\right) \\
&= \frac{1}{8\pi}\times\frac{3}{\frac{5}{4}-\cos(\lambda)} = \frac{1}{\pi}\times\frac{3}{10-8\cos(\lambda)}\,.
\end{aligned}$$

Exercice 3. (1)
```
n=100
model=list(ar=c(0,0,-0.1,0.8),ma=c(0.2,0.1,0.1))
x=arima.sim(model,n)
```

(2) `k=kernel("daniell",4);spec.pgram(x,k,taper=0,log="no")`

(3) Les abcsisses vont de 0 à π. On observe un mode en la fréquence $(0,25/0,5)\times\pi$. Ce qui correspond à la période $2\pi/((0,25/0,5)\times\pi) = 4$.

Exercice 4. Voir l'algorithme 1.

Exercice 5. Nous avons

$$\sigma(0) = \mathbb{E}(X_tX_t) = \frac{9}{16}\sigma(0)+\frac{1}{64}\sigma(0)+1-\frac{3}{16}\sigma(1)\,,$$

et

$$\sigma(1) = \mathbb{E}(X_tX_{t-1}) = \frac{3}{4}\sigma(0)-\frac{1}{8}\sigma(1)\,,$$

d'où

$$\sigma(1) = \frac{2}{3}\sigma(0)\,.$$

Nous reportons cette égalité dans la première équation et nous obtenons

$$\sigma(0) = \frac{9}{16}\sigma(0)+\frac{1}{64}\sigma(0)+1-\frac{1}{8}\sigma(0)\,,$$

Algorithme 1 Programme

```
alphap=1/10; al=1-(alphap)^2; be=(1-alphap)/(1+alphap)
s=0
for (j in 50:99)
{
 xw=window(x,1,i)
 xlisse<-HoltWinters(x,alpha=al,beta=be,gamma=FALSE)
 p<-predict(xlisse,n.ahead=1)
 s=s+(p-x[i+1])^2
}
min=s
almin=alphap
for (i in 2:9)
{
 alphap=i/10; al=1-(alphap)^2; be=(1-alphap)/(1+alphap)
 s=0
 for (j in 50:99)
 {
  xw=window(x,1,i)
  xlisse<-HoltWinters(x,alpha=al,beta=be,gamma=FALSE)
  p<-predict(xlisse,n.ahead=1)
  s=s+(p-x[i+1])^2
 }
 if (s<min)
 {
  min=s; almin=alphap
 }
}
cat("meilleur paramètre trouvé : alpha =",alphap)
```

donc

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(0)}{64}(64-36-1+8) &= 1 \\ \sigma(0) &= \frac{64}{35}, \end{aligned}$$

$$\sigma(1) = \frac{128}{105}.$$