M1 IM - Séries temporelles - 2015-2016
`http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Contrôle no 3, sujet B (durée 2h)

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. Soit $(\epsilon_t)_{t\geq 0}$ une suite de bruits blancs centrés.

(1) Existe-t-il un processus stationnaire $(X_t)_{t\geq 0}$ vérifiant la relation de récurrence suivante ?

$$X_t = \frac{4}{3}X_{t-1} + \frac{1}{12}X_{t-2} - \frac{1}{12}X_{t-3} + \epsilon_t \text{ , pour } t \geq 3$$

(2) Existe-t-il un processus stationnaire $(X_t)_{t\geq 0}$ vérifiant la relation de récurrence suivante ?

$$X_t = \epsilon_t + 2\epsilon_{t-2} + 4\epsilon_{t-4} + 8\epsilon_{t-6} \text{ , pour } t \geq 6$$

Exercice 2. Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus stationnaire de fonction de covariance telle que, pour $h \in \mathbb{N}$, $\sigma(h) = 1/2^h$. Calculer la densité spectrale de $(X_t)_{t\geq 0}$.

Exercice 3. On s'intéresse au processus $ARMA$ stationnaire $(X_t)_{t\geq 0}$ vérifiant la relation de récurrence

$$X_t - \sum_{i=1}^{4} a_i X_{t-i} = \epsilon_t + \sum_{i=1}^{3} b_i \epsilon_{t-i} \text{ (pour } t \geq 3) \text{ ,}$$

où les (ϵ_t) forment un bruit blanc et $a_1 = 0$; $a_2 = 0$; $a_3 = -0,1$; $a_4 = 0,8$; $b_1 = 0,2$; $b_2 = 0,1$; $b_3 = 0,1$.

(1) Donner des instructions en `R` permettant de simuler une trajectoire de (X_t) pour t entre 1 et 100. Notons `x` le résultat obtenu.

(2) Donner des instructions en `R` permettant de tracer la densité spectrale (approchée) de (X_t).

(3) On suppose que la densité spectrale obtenue est celle de la figure (0.1). Que nous dit ce graphique sur la composante périodique de (X_t) ?

Exercice 4. Soit `x` une série temporelle de longueur 100. Pour α dans la liste $\{0,1; 0,2; 0,3; \dots ; 0,9\}$, on note $\widehat{x}_{t,1}^{(\alpha)}$ la prédiction en $t+1$ obtenue avec le lissage exponentiel double de paramètre α. Pour α fixé et t allant de 50 à 99, on fait la somme des carrés des erreurs de prédiction et on la note SE_α. Écrire un programme `R` qui trouve α minimisant SE_α pour α dans la liste ci-dessus.

Exercice 5. Soit $(\epsilon_t)_{t\geq 0}$ une suite de bruits blancs centrés, de variance 1. Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus stationnaire vérifiant la relation de récurrence

$$X_t = \frac{3}{4}X_{t-1} - \frac{1}{8}X_{t-2} + \epsilon_t \text{ , pour } t \geq 2 \text{ .}$$

Soit σ la fonction d'auto-covariance de $(X_t)_{t\geq 0}$. Calculer $\sigma(0)$, $\sigma(1)$.

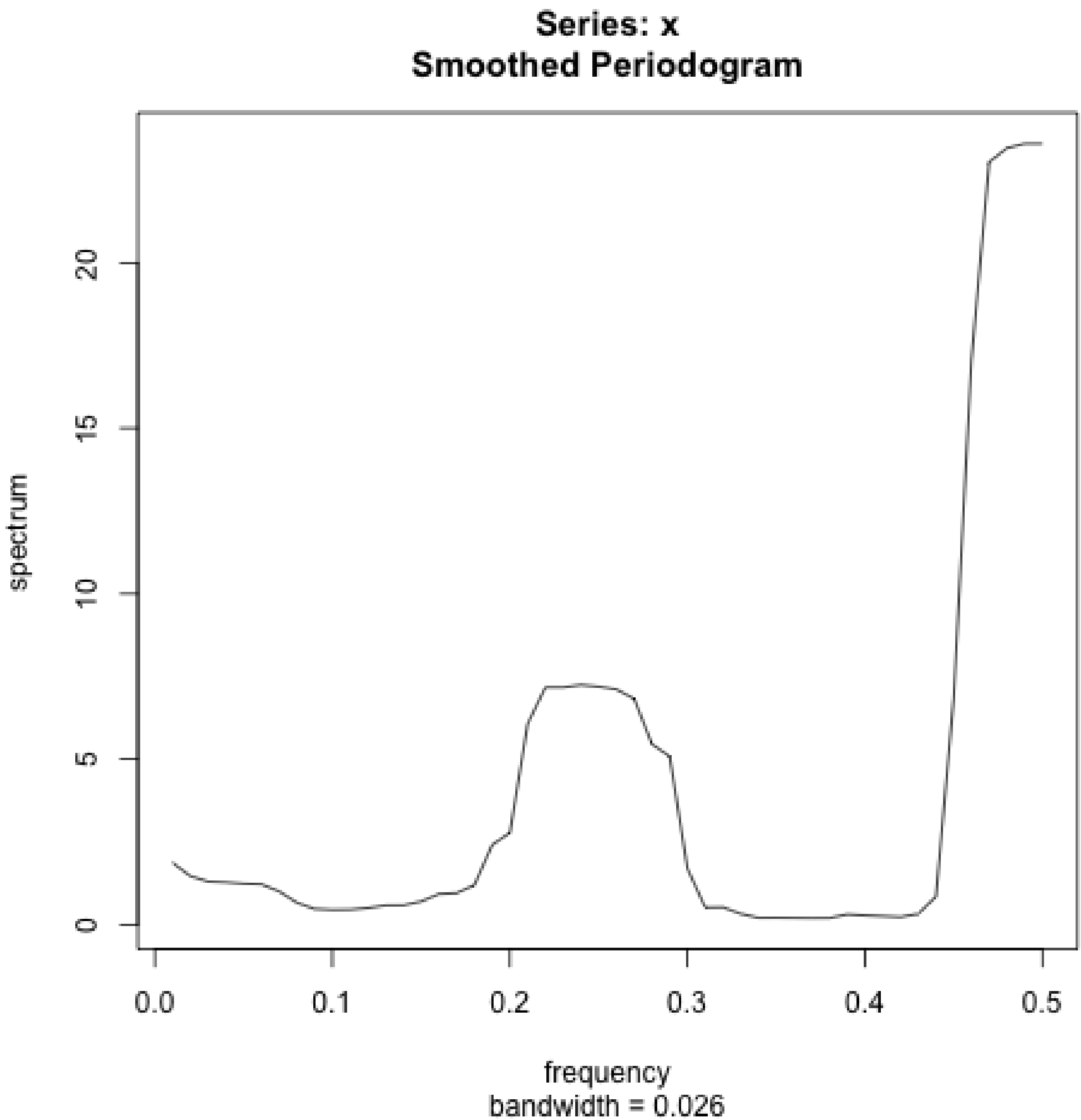

FIGURE 0.1. Densité spectrale