M1 IM - Méthodes de simulation stochastique (Monte-Carlo)
2015-2016

Corrigé du contrôle no 1, sujet A (durée 1h30)

Documents, téléphones et calculatrices interdits.

Exercice 1. (1) On prend X_1, X_2 ... i.i.d. de loi $\mathcal{E}(1)$. Comme $\mathbb{E}(|X_1 e^{-X_1^2}|) < \infty$ (parce qu'on intègre une fonction bornée) alors, par la loi des grands nombres,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i e^{-X_i^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} I\,.$$

Nous avons

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{-x^2/2} \times \sqrt{2\pi} x e^{-x} \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)dx\,.$$

On prend Y_1, Y_2 ... i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0;1)$. Comme $\mathbb{E}(|Y_1 e^{-Y_1}\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(Y_1)|) < \infty$ (parce qu'on intègre une fonction bornée) alors, par la loi des grands nombres,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sqrt{2\pi} Y_i e^{-Y_i} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} I\,.$$

(2) Voir algorithme 1.

Algorithme 1 Boucle de Monte-Carlo.

```
print(n)
n=1000
s=0
for (i in 1:n)
{
  u=runif(1,0,1)
  x=-log(u)
#c'est la méthode du cours pour simuler une loi exponentielle de paramètre 1
  s=s+x*exp(-x^2)
}
print(s/n)
```

Exercice 2. (1) La fonction F est continue. Nous allons donc pouvoir l'inverser. Soit u dans $[0;1]$. On cherche x tel que $F(x) = u$. Nous avons la suite d'équations équivalentes (pour x et u dans $[0;1]$) :

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{x} \\ u^2 &= x\,. \end{aligned}$$

Donc

$$F^{-1} \,:\, u \in [0;1] \mapsto u^2\,.$$

(2) Le lemme du cours nous dit que l'algorithme 2 simule une variable de fonction de répartition F.

Algorithme 2 Simulation par pseudo-inverse.

```
u=runif(1,0,1)
x=u^2
print(x)
```