M1 IM - Méthodes de simulation stochastique (Monte-Carlo)
2015-2016

Corrigé du contrôle no 1, sujet B (durée 1h30)

Documents, téléphones et calculatrices interdits.

Exercice 1. Soit u dans $[0;1]$. On cherche les x tel que $F(x) \geq u$. Si $u \in [1/2;1]$,
$$\{x \,:\, F(x) \geq u\} = [1;+\infty[\,.$$
Si $u \in [0;1/2[$, il existe x tel que $F(x) = u$ (c'est $x = 4u^2$), donc
$$\{x \,:\, F(x) \geq u\} = [4u^2;+\infty[\,.$$
Nous en déduisons
$$F^{-1}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \in [1/2;1] \\ 4u^2 & \text{si } u \in [0;1/2[\,. \end{cases}$$

Exercice 2. (1) Nous avons, pour tout $x \geq 0$,
$$\begin{aligned} (1+x)^2 &\leq 1+x^2 \\ &\leq 1+1+x^3 \\ &\leq 2(1+x^3)\,. \end{aligned}$$
Donc, pour tout x,
$$f(x) \leq \frac{2}{Z} \times g(x)\,.$$

(2) Pour simuler une variable de densité g, nous calculons la fonction de répartition correspondante. Pour tout $x \geq 0$,
$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{(1+t)^2} dt &= \left[-\frac{1}{1+t}\right]_0^x \\ &= 1 - \frac{1}{1+x}\,. \end{aligned}$$
La fonction de répartition cherchée est donc
$$G \,:\, x \in \mathbb{R} \mapsto G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0\,, \\ 1 - \frac{1}{1+x} & \text{si } x \geq 0\,. \end{cases}$$
On en calcule le pseudo-inverse
$$G^{-1} \,:\, u \in [0;1[\mapsto \frac{1}{1-u} - 1\,.$$
On utilise la méthode de la fonction de répartition pour simuler suivant la loi voulue (on voit que le fait que G^{-1} n'est pas définie en 1 ne pose pas de problème).

(3) Nous simulons donc suivant la méthode du rejet (voir algorithme 1). On simule des variables X de densité g et des variables $V \sim \mathcal{U}([0;1])$ jusqu'à ce que (suite d'inégalités équivalentes)
$$\begin{aligned} V \times Cg(X) &\leq f(X) \\ V \times \frac{2}{Z} \times \frac{1}{(1+X^2)} &\leq \frac{1}{Z} \frac{1}{1+X^3} \\ V \times \frac{2}{(1+X^2)} &\leq \frac{1}{1+X^3}\,. \end{aligned}$$
On voit que la condition d'arrêt ne nécessite pas la connaissance de Z.

Algorithme 1 Simulation par rejet.

```
b=0
while (b==0)
{
  u=runif(1,0,1)
  x=1/(1-u)-1
  v=runif(1,0,1)
  if (v*2/(1+x)^2<1/(1+x^3))
  { b=1 }
}
print(x)
```