M1 IM - Méthodes de simulation stochastique (Monte-Carlo)
2015-2016

Corrigé du contrôle no 1, sujet C (durée 1h30)

Documents, téléphones et calculatrices interdits.

Exercice 1. (1) Soient X_1,X_2, ... i.i.d. de loi $\mathcal{U}([0;1])$. On remarque que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left|\frac{\cos(x)}{x^{1/3}}\right| dx &\leq \int_0^1 \frac{1}{x^{1/3}} dx \\ &= \left[\frac{x^{2/3}}{(2/3)}\right]_0^1 = \frac{3}{2}\,.\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}\left(\left|\frac{\cos(X_1)}{X_1^{1/3}}\right|\right) < \infty\,.$$

Donc, par la loi des grands nombres,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\cos(X_i)}{X_i^{1/3}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} I\,.$$

(2) Voir l'algorithme 1.

Algorithme 1 Méthode de Monte-Carlo.

```
n=1000
s=0
for (i in 1:n)
{
  u=runif(1,0,1)
  s=s+cos(u)/(u^(1/3))
}
print(s/n)
```

(3) Nous avons

$$\mathbb{E}\left(\left(\frac{\cos(X_1)}{X_1^{1/3}}\right)^2\right) \leq \int_0^1 \frac{1}{x^{2/3}} dx = \left[\frac{x^{1/3}}{(1/3)}\right]_0^1 = 3 < \infty\,. \tag{0.1}$$

On veut (suite d'inégalités équivalentes)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\cos(X_i)}{X_i^{1/3}} - I\right| > 0,01\right) &\leq 0,1 \\ \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\cos(X_i)}{X_i^{1/3}} - I\right| > \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\times 0,01\right) &\leq 0,1 \\ \mathbb{P}\left(|Z| > \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\times 0,01\right) &\leq 0,1\end{aligned}$$

avec $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$ (par le TCL, que l'on peut appliquer à cause de l'inégalité (0.1)). Ce qui revient à (en utilisant les symétries de la gaussienne)

$$\mathbb{P}\left(Z \leq \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\times 0,01\right) \geq 1 - 0,05 = 0,95\,.$$

On voit sur la table qu'il suffit de choisir n tel que

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\times 0,01 \geq 1,65\,,$$

c'est à dire

$$n \geq 165 \times \sigma^2 \,.$$

Exercice 2. Dans chaque répétition de la boucle, nous avons une variable $X = -2\log(U)$ avec $U \sim \mathcal{U}([0;1])$ (je remplace `x` par X, `u` par U, pour faire plus joli). D'après le cours, X est donc de loi $\mathcal{E}(1/2)$. On s'arrête si $X > 1$, ce qui arrive avec probabilité :

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x/2}}{2} dx = \left[e^{-x/2} \right]_1^{+\infty} = e^{-1/2} \,.$$

Les variables tirées dans chaque répétition de la boucle sont indépendantes les unes des autres donc la probabilité de s'arrêter après k boucles ($k \in \mathbb{N}^*$) est

$$(1 - e^{-1/2})^{k-1} e^{-1/2} \,.$$

Le nombre moyen de passage dans la boucle est donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-e^{-1/2})^{k-1} e^{-1/2} &= e^{-1/2} \frac{d}{dz} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} z^k \right) \Bigg|_{z=1-e^{-1/2}} \\
&= e^{-1/2} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-z} \right) \Bigg|_{z=1-e^{-1/2}} \\
&= e^{-1/2} \left(\frac{1}{(1-z)^2} \right) \Bigg|_{z=1-e^{-1/2}} \\
&= \frac{1}{e^{-1/2}} \,.
\end{aligned}$$