M1 IM - Méthodes de simulation stochastique (Monte-Carlo)
2015-2016

Corrigé du contrôle no 1, sujet D (durée 1h30)

Documents, téléphones et calculatrices interdits.

Exercice 1. (1) Nous calculons :

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{0}\sqrt{-2x-x^2} &= \int_{-2}^{0}\sqrt{1-(-1-x)^2}dx \\ \text{(aire d'un demi-disque de rayon 1)} &= \frac{\pi}{2}\,,\end{aligned}$$

$$\int_{-2}^{0}\frac{1}{2}=1\,.$$

Donc f et g sont des densités de probabilité.

(2) Pour tout x dans $[-2;0]$,

$$\sqrt{-2x-x^2}\leq\sqrt{1-(-1-x)^2}\leq 1\,.$$

D'où l'inégalité voulue.

(3) Dans le programme, on simule U uniforme sur $[-2;0]$ (donc de densité g) et V uniforme jusqu'à ce que

$$V\times\frac{4}{\pi}\times g(U)\leq f(U)\,.$$

C'est donc la méthode du rejet. La variable aléatoire renvoyé par ce programme est de densité f.

Exercice 2. Soient X_1, X_2, ... des variables i.i.d. de loi $\mathcal{U}([0;1])$. Nous avons

$$\mathbb{E}\left(\left|\frac{\sin(X_1)}{\sqrt{X_1}}\right|\right)\leq\mathbb{E}\left(\frac{1}{\sqrt{X_1}}\right)=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\left[\frac{\sqrt{x}}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}<\infty\,.$$

Donc, par la loi des grands nombres,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin(X_i)}{\sqrt{X_i}}\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} I\,.$$

Nous avons

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2}\,.$$

Donc

$$f\,:\,x\in\mathbb{R}\mapsto\frac{2}{\sqrt{x}}\mathbb{1}_{[0;1[}(x)$$

est une densité de probabilité. Soient Y_1, Y_2, ... des variables i.i.d. de loi de densité f. Nous avons

$$\mathbb{E}(|\sin(Y_1)|)\leq\mathbb{E}(1)=1\,.$$

Donc, par la loi des grands nombres,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\sin(Y_i)\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} I\,.$$

Il faut préciser comment simuler les Y_i. Calculons leur fonction de répartition. Pour $x\in[0;1[$,

$$\int_0^x\frac{2}{\sqrt{t}}dt=\sqrt{x}\,.$$

Donc, cette fonction de répartition est

$$F(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & \text{si } x\in[0;1[\\ 0 & \text{sinon .}\end{cases}$$

Son pseudo-inverse est

$$u \in [0;1] \mapsto u^2 \,.$$

On peut alors simuler les Y_i par la méthode de la fonction de répartition.