M1 IM - Méthodes de simulation stochastique (Monte-Carlo)

2015-2016

Corrigé du contrôle no 2, sujet A (durée 1h30)

Documents, téléphones et calculatrices interdits.

Exercice 1. (1) Soit $X \sim \mathcal{N}(0;1)$. On remarque que e^{-X^4} est bien intégrable (car bornée). Si on prend X_1, X_2, ... i.i.d. de même loi que X, la loi des grands nombres nous dit que

$$\frac{e^{-X_1^4}+\dots+e^{-X_n^4}}{n} \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow}} I\,.$$

(2) Notons $f(x)=e^{-x^4}$. On chercher une fonction h proche de f et telle que $\mathbb{E}(h(X))$ peut être calculée de manière exacte. Nous prenons $h(x)=e^{-x^2}$. Nous pouvons bien calculer

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(h(X)) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx\\ &= \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(3^{-1/2})^2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi 3^{-1}}}\times\frac{1}{\sqrt{3}}dx\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\,.\end{aligned}$$

Nous calculons ensuite des moyennes empiriques

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{-X_i^4}-e^{-X_i^2}$$

qui approchent $\mathbb{E}(f(X)-h(X))$.

(3) Voir algorithme

Algorithme 1 Exercice 1

```
s=0
for (i in 1:n)
{
x1=rnorm(1,0,1)
s=s+exp(-x1^4)-exp(-x1^2)
}
cat("moyenne cherchée : ",s/n+3^(-0.5))
```

Exercice 2. Nous proposons ici une démonstration alternative à celle du cours. Tout d'abord,

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(g(X,Y)|X)) = \mathbb{E}(g(X,Y)\,,$$

donc il suffit de comparer les moments d'ordre 2. Nous avons, par Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathbb{E}(g(X,Y)|X)^2) &\leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(g(X,Y)^2|X))\\ &= \mathbb{E}(g(X,Y)^2)\,.\end{aligned}$$

Donc

$$\mathrm{Var}(\mathbb{E}(g(X,Y)|X)) \leq \mathrm{Var}(g(X,Y))\,.$$

Exercice 3. (1) Nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left|\frac{\sin(X_1)\sin(X_2)}{\sqrt{X_1}\sqrt{X_2}}\right|\right) &\leq \mathbb{E}\left(\frac{1}{\sqrt{X_1}\sqrt{X_2}}\right) \\
&= \int_{[0;1]^2} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{y}} dxdy \\
\text{(Fubini)} \quad &= \left(\int_{[0;1]} \frac{1}{\sqrt{x}} dx\right)\left(\int_{[0;1]} \frac{1}{\sqrt{y}} dy\right) \\
&= \left(\left[2\sqrt{x}\right]_0^1\right)^2 \\
&= 4\,.
\end{aligned}$$

Donc la variable

$$\frac{\sin(X_1)\sin(X_2)}{\sqrt{X_1}\sqrt{X_2}}$$

est bien intégrable.

(2) Si on tire $((U_i, V_i))_{i\geq 1}$ i.i.d. de même loi que (X_1, X_2), la loi des grands nombres nous dit que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\sin(U_i)\sin(V_i)}{\sqrt{U_i V_i}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} I\,.$$