

M1 IM - Méthodes de simulation stochastique (Monte-Carlo)

2015-2016

NOM :

PRÉNOM :

Contrôle no 2, sujet A (durée 1h30)

Documents, téléphones et calculatrices interdits. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. On ne tiendra pas compte dans la correction des erreurs de syntaxe en R.

PRÉLIMINAIRES

Rendre la feuille avec la copie. Si vous bénéficiez d'un tiers-temps, ne traitez que l'exercice 1 et rendez votre devoir au bout d'une heure trente.

Exercice 1. On veut calculer

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\exp\left(-x^4 - \frac{x^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} dx.$$

- (1) Proposer une méthode de Monte-Carlo pour calculer I (de manière approchée).
- (2) Proposer une méthode de réduction de variance par variable de contrôle.
- (3) Écrire un programme en R qui calcule I par Monte-Carlo en utilisant cette réduction de variance (dans le petit cadre ci-dessous).

Exercice 2. Soit (X, Y) une variable aléatoire sur \mathbb{R}^2 . Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\mathbb{E}(|g(X, Y)|) < \infty$. Montrer que

$$\text{Var}(\mathbb{E}(g(X, Y)|X)) \leq \text{Var}(g(X, Y)).$$

(On demande de refaire une démonstration du cours.)

Exercice 3. Soient X et Y indépendantes et de même loi, $X \sim \mathcal{U}([0; 1])$. On veut calculer

$$I = \mathbb{E} \left(\frac{\sin(X_1 X_2)}{\sqrt{X_1 X_2}} \right).$$

- (1) Montrer que I est bien définie.
- (2) Proposer une méthode de Monte-Carlo pour calculer I de manière approchée.