M1 IM - Méthodes de simulation stochastique (Monte-Carlo)
2015-2016

Corrigé du contrôle no 2, sujet B (durée 1h30)

Documents, téléphones et calculatrices interdits.

Exercice 1. (1) Soit $X \sim \mathcal{E}(1)$. La fonction $x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \exp(-x^4 + x)$ est bornée (car $-x^4 + x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et ce polynôme est continu). Donc $\mathbb{E}(e^{-X^4+X}) < \infty$. Nous remarquons que

$$\mathbb{E}(e^{-X^4+X}) = \int_0^{+\infty} e^{-x^4+x}e^{-x}dx = I\,.$$

Donc, si nous prenons X_1, X_2, ... i.i.d. de même loi que X, la loi des grands nombres nous dit que

$$\frac{e^{-X_1^4+X_1} + \cdots + e^{-X_n^4+X_n}}{n} \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow}} I\,.$$

(2) Voir algorithme 1.

Algorithme 1 Exercice 1

```
n=1000
s=0
for (i in 1:n)
{
  u=runif(1,0,1); x=log(u)
  s=s+exp(-x^4+x)
}
cat("valeur approchée : ",s/n)
```

Exercice 2. (1) Nous calculons, pour x dans $[0;1]$,

$$\int_0^x \frac{3}{2}\frac{1}{t^{1/3}}dt = \left[t^{2/3}\right]_0^x = x^{2/3}\,.$$

Donc

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0\,, \\ x^{2/3} & \text{si } x \in [0;1]\,, \\ 1 & \text{si } x \geq 1\,. \end{cases}$$

(2) Pour $u \in [0;1]$, nous cherchons x tel que $F(x) = u$. Nous trouvons $x = u^{3/2}$. Donc

$$F^{-1}(u) = u^{3/2}\,,\ \forall u \in [0;1]\,.$$

(3) Voir algorithme 2

Exercice 3. Nous proposons ici une démonstration alternative à celle du cours. Tout d'abord,

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(g(X,Y)|X)) = \mathbb{E}(g(X,Y)\,,$$

donc il suffit de comparer les moments d'ordre 2. Nous avons, par Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathbb{E}(g(X,Y)|X)^2) &\leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(g(X,Y)^2|X)) \\ &= \mathbb{E}(g(X,Y)^2)\,.\end{aligned}$$

Algorithme 2 Exercice 2

```
u=runif(1,0,1)
x=u^(3/2)
print(x)
```

Donc

$$\mathrm{Var}(\mathbb{E}(g(X,Y)|X)) \leq \mathrm{Var}(g(X,Y))\,.$$