M1 IM - Méthodes de simulation stochastique (Monte-Carlo)
2015-2016
NOM :
PRÉNOM :

Contrôle no 2, sujet B (durée 1h30)

Documents, téléphones et calculatrices interdits. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. On ne tiendra pas compte dans la correction des erreurs de syntaxe en `R` *.*

Préliminaires

Rendre la feuille avec la copie. Si vous bénéficiez d'un tiers-temps, ne traitez que l'exercice 2 et rendez votre devoir au bout d'une heure trente.

Exercice 1. On veut calculer

$$I = \int_0^{+\infty} \exp\left(-x^4\right) dx \,.$$

(1) Proposer une méthode de Monte-Carlo pour calculer I (de manière approchée).

(2) Écrire un programme en `R` qui calcule I par Monte-Carlo (dans le petit cadre ci-dessous).

Exercice 2. Soit la densité de probabilité

$$f \,:\, x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{3}{2}\frac{1}{x^{1/3}}\mathbb{1}_{[0;1]}(x)\,.$$

(1) Calculer la fonction de répartition associée (notée F).

(2) Calculer le pseudo-inverse de F.

(3) Écrire un code en `R` qui simule une variable aléatoire de densité f (sur votre copie).

Exercice 3. Soit (X, Y) une variable aléatoire sur $\mathbb{R}^2$. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\mathbb{E}(|g(X, Y)|) < \infty$. Montrer que

$$\mathrm{Var}(\mathbb{E}(g(X, Y)|X)) \leq \mathrm{Var}(g(X, Y))\,.$$

(On demande de refaire une démonstration du cours.)