M1 IM - Méthodes de simulation stochastique (Monte-Carlo)
2015-2016

Corrigé du contrôle no 2, sujet C (durée 1h30)

Documents, téléphones et calculatrices interdits.

Exercice 1. (1) La fonction $x \mapsto e^{-x^2/2+x}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ donc I est bien définie. Si on prend $(X_i)_{i\geq 0}$ i.i.d. de même loi que X, alors la loi des grands nombres nous dit

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{X\geq -1} e^{+X_i} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} I\,.$$

(2) On cherche une fonction $\widetilde{f}_1$ proche de $x \mapsto e^{-x^2/2-x}\mathbb{1}_{x\geq 1}\sqrt{2\pi}$ et telle que l'on sache simuler suivant la densité $x \mapsto \widetilde{f}_1(x)/\int_{\mathbb{R}} \widetilde{f}_1(u)du$. Nous prenons $\widetilde{f}_1$ telle que

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}\widetilde{f}_1(x) &= \exp(-\frac{x^2}{2}-x)\\ &= \exp(-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2})\,.\end{aligned}$$

Nous avons

$$\int_{\mathbb{R}} \widetilde{f}_1(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp(-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2})}{\sqrt{2\pi}}dx = e^{1/2}\,.$$

Notons

$$\widetilde{f}(x) = \frac{\widetilde{f}_1(x)}{e^{1/2}}\,.$$

Notons $f(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$, $g(x) = e^x\mathbb{1}_{x\geq 1}$. Nous avons

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)g(x)}{\widetilde{f}(x)}\widetilde{f}(x)dx\,.$$

Si nous prenons Y_1, Y_2, ... i.i.d. de loi de densité $\widetilde{f}$, la loi des grands nombres nous dit

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{f(Y_i)g(Y_i)}{\widetilde{f}(Y_i)} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} I\,.$$

(3) Voir algorithme 1.

Exercice 2.

(1) On peut écrire $I = \int_0^{1/2} \frac{1}{2\sqrt{x}\log(x)} \times 2\mathbb{1}_{[0;1]}(x)dx$. On voit donc que si $X_1, X_2, \dots$ sont i.i.d. de loi $\mathcal{U}([0;1/2])$ alors (puisque $\mathbb{E}(|1/(\sqrt{X_1}\log(X_1))|) < \infty$ car $1/(\sqrt{x}\log(x)) \leq 1/\sqrt{x}$ au voisinage de 0 et $\int_0^{1/2}\frac{1}{\sqrt{x}}dx < \infty$), par la loi des grands nombres,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{X_i}\log(X_i)} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} I\,.$$

(2) On remarque que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\frac{1}{2X_1(\log(X_1))^2}\right) &= \int_0^{1/2}\frac{1}{4x(\log(x))^2}\times 2dx\\ \text{(changement de variable } t=\log(x)) &= \int_{-\infty}^{\log(1/2)}\frac{1}{2t^2}dt\end{aligned}$$

est finie. Le théorème central-limite nous dit que l'erreur

$$I - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{X_i}\log(X_i)}$$

Algorithme 1 Exercice 1

```
g<-function(x)
{
  z=0
  if (x>-1)
    { z=exp(x) }
  return(z)
}
f<-function(x)
{ return(exp(-x^2/2)/sqrt(2*pi)) }
ft<-function(x)
{ return(exp(-0.5*(x-1)^2)/sqrt(2*pi)) }
n=1000
s=0
for (i in 1:n)
{
  x=rnorm(1,1,1)
  s=s+f(x)*g(x)/ft(x)
}
print(s/n)
```

est (approximativement) une gaussienne Z de variance σ^2/n. Nous voulons

$$\mathbb{P}(|Z| > 0,01) \leq 0,05\,,$$

c'est à dire

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sqrt{n}Z}{\sigma}\right| > \frac{\sqrt{n}}{\sigma}0,01\right) \leq 0,05\,.$$

En utilisant les symétries de la gaussienne, nous voyons que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sqrt{n}Z}{\sigma}\right| > \frac{\sqrt{n}}{\sigma}0,01\right) = 2\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}Z}{\sigma} > \frac{\sqrt{n}}{\sigma}0,01\right)\,.$$

Comme $\sqrt{n}Z/\sigma$ est de loi $\mathcal{N}(0;1)$, nous voyons dans la table qu'il suffit de prendre n tel que

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}0,01 \geq 1,96\,,$$

c'est à dire

$$n \geq \left(\frac{1,96\sigma}{0,01}\right)^2\,.$$