M1 IM - Méthodes de simulation stochastique (Monte-Carlo)
2015-2016

Corrigé du contrôle no 2, sujet D (durée 1h30)

Documents, téléphones et calculatrices interdits.

Exercice 1. (1) Pour tout $u \geq 0$,

$$\begin{aligned}(1+u)^2 &= 1+u^2+2u \\ &\leq 1+u^2+2(1+u^2) \\ &= 3(1+u^2)\,.\end{aligned}$$

Donc, pour tout $x > 1$,

$$\begin{aligned}f(x) &\leq \frac{1}{Zx(1+(\log(x))^2)} \\ &\leq \frac{1}{3Zx(1+\log(x))^2} = \frac{1}{3Z}g(x)\end{aligned}$$

La formule est encore vraie pour $x \leq 1$.

(2) Nous utilisons la technique d'échantillonage d'importance pour simuler suivant la loi de densité f (voir programme 1). Remarquons que pour $x > 0$,

$$\frac{f(x)}{(1/(3Z))g(x)} = 3\inf(1, \log(x))\,.$$

Algorithme 1 Simulation de variable aléatoire

```
b=0
while (b==0)
{
  u=runif(1,0,1)
  x='simuler suivant g'
  v=runif(1,0,1)
  if (v<3*inf(1,log(x)))
  {
    b=1
  }
print(x)
```

Exercice 2. (1) Nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left|\frac{\sin(X_1)\sin(X_2)}{\sqrt{X_1}\sqrt{X_2}}\right|\right) &\leq \mathbb{E}\left(\frac{1}{\sqrt{X_1}\sqrt{X_2}}\right) \\ &= \int_{[0;1]^2}\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{y}}dxdy \\ \text{(Fubini)} \quad &= \left(\int_{[0;1]}\frac{1}{\sqrt{x}}dx\right)\left(\int_{[0;1]}\frac{1}{\sqrt{y}}dy\right) \\ &= \left(\left[2\sqrt{x}\right]_0^1\right)^2 \\ &= 4\,.\end{aligned}$$

Donc la variable

$$\frac{\sin(X_1)\sin(X_2)}{\sqrt{X_1}\sqrt{X_2}}$$

est bien intégrable.

(2) Si on tire $((U_i, V_i))_{i\geq 1}$ i.i.d. de même loi que (X_1, X_2), la loi des grands nombres nous dit que
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin(U_i)\sin(V_i)}{\sqrt{U_iV_i}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} I\,.$$

(3) Pour tout i, (U_i, V_i) et $(1-U_i, 1-V_i)$ ont même loi donc, toujours par la loi des grands nombres,
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(U_i)\sin(V_i)}{\sqrt{U_iV_i}} + \frac{\sin(1-U_i)\sin(1-V_i)}{\sqrt{(1-U_i)(1-V_i)}}\right)\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} I\,.$$
C'est la méthode des variables antithétiques. D'après le cours, la variance de cette méthode est plus petite que la variance de la méthode utilisée à la question précédente.

(4) Voir algorithme 2.

Algorithme 2 Exercice 2

```
f<-function(u,v)
  { return(sin(u)*sin(v)/sqrt(u*v)) }
n=1000
s=0
for (i in 1:n)
{
  u=runif(2,0,1)
  s=s+f(u[1],u[2])/2-f(1-u[1],1-u[2])/2
}
print(s/n)
```