M1 IM - Méthodes de simulation stochastique (Monte-Carlo)

2015-2016

NOM :

PRÉNOM :

Contrôle no 2, sujet D (durée 1h30)

Documents, téléphones et calculatrices interdits. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. On ne tiendra pas compte dans la correction des erreurs de syntaxe en `R`.

Préliminaires

Rendre la feuille avec la copie. Si vous bénéficiez d'un tiers-temps, ne traitez que l'exercice 1 et rendez votre devoir au bout d'une heure trente.

Exercice 1. Soit la densité de probabilité $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{1}_{]1;+\infty[}(x)/(x(1+\log(x))^2)$. On suppose qu'on sait simuler une variable aléatoire de densité g.

(1) Soit

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{1}_{]1;+\infty[}(x) \times \inf(\log(x), 1)/(Zx(1+(\log(x))^2)) ,$$

avec $Z = \int_1^{+\infty} \inf(\log(x), 1)/(x(1+(\log(x))^2))dx$. Trouver une constante C telle que $f(x) \leq Cg(x)$ pour tout x.

(2) Écrire en `R` un programme qui simule une variable aléatoire de loi de densité f.

Exercice 2. Soient X et Y indépendantes et de même loi, $X \sim \mathcal{U}([0;1])$. On veut calculer

$$I = \mathbb{E}\left(\frac{\sin(X_1 X_2)}{\sqrt{X_1 X_2}}\right) .$$

(1) Montrer que I est bien définie.

(2) Proposer une méthode de Monte-Carlo pour calculer I de manière approchée.

(3) Proposer une méthode de réduction de variance par variables antithétiques.

(4) Écrire un programme en `R` qui calcule I de manière approchée en utilisant cette réduction de variance (dans le petit cadre ci-dessous).