M1 IM - Méthodes de simulation stochastique (Monte-Carlo)
2015-2016

Corrigé du contrôle no 3, sujet A (durée 3h)

Documents, téléphones et calculatrices interdits. La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. On n'a pas tenu compte dans la correction des erreurs de syntaxe en **R**.

Exercice 1. (1) On remarque que la fonction à intégrer est continue et vérifie

$$\frac{e^{-x}}{\sqrt{x+1}(1+x)} \underset{x\to+\infty}{\ll} e^{-x/2}\,,\ \frac{1}{\sqrt{x+1}(1+x)^3} \underset{x\to 0}{\to} 1\,,$$

donc I est bien définie. Nous pousvons écrire

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x}(1+x)} e^{-x} dx = \mathbb{E}\left(\frac{1}{\sqrt{X+1}(X+1)}\right)$$

avec $X \sim \mathcal{E}(1)$. La variable

$$\frac{1}{\sqrt{X+1}(X+1)}$$

est positive et L^1 (puisque I est définie). Si nous prenons $X_1, X_2, \dots$ i.i.d. de même loi que X, nous avons, par la loi des grands nombres

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+X_i}(1+X_i)} \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow}} I\,.$$

Soit Y de densité

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)\frac{1}{(1+x)^2}\,.$$

Nous connaissons une primitive de la densité ($x \mapsto 1/(1+x)$, sur $[0;+\infty[$), donc nous pouvons simuler Y par inversion de la fonction de répartition. La fonction de répartition est

$$x \in \mathbb{R} \mapsto 1 - \frac{1}{1+x}\,.$$

Son pseudo-inverse sur $[0;1]$ est

$$u \in [0;1] \mapsto \frac{1}{1-u} - 1\,.$$

Nous avons

$$I = \mathbb{E}\left(\frac{(1+Y)e^{-Y}}{\sqrt{1+Y}}\right)\,.$$

La variable

$$\frac{1+Y}{\sqrt{1+Y}}$$

est positive et L^1 (puisque I est définie). Si nous prenons $Y_1, Y_2, \dots$ i.i.d. de même loi que Y, nous avons, par la loi des grands nombres

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{(1+Y_i)e^{-Y_i}}{\sqrt{1+Y_i}} \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow}} I\,.$$

(2) Voir l'algorithme 1 (qui utilise la deuxième méthode ci-dessus). Posons

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}\left(\frac{(1+Y)e^{-Y}}{\sqrt{1+Y}}\right)\,.$$

Algorithme 1 Monte-Carlo

```
n=10000
s=0
for (i in 1:n)
{
  u=runif(1,0,1)
  y=1/(1-u)-1
  s=s+exp(-y)*(1+y)/sqrt(1+y)
}
print(s/n)
```

(3) Soient $\epsilon = 0,02$ et $\delta = 0,01$. Notons $f(x) = (1+x)/\sqrt{x}$ pour tout x. Nous voulons
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{f(Y_1)+\dots+f(Y_n)}{n} - I\right| \geq \epsilon\right) \leq \delta\,,$$
c'est à dire
$$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left|\frac{f(Y_1)+\dots+f(Y_n)}{n} - I\right| \geq \frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) \leq \delta\,.$$
Nous avons
$$\sigma^2 = \int_0^{+\infty}(1+y)^2 e^{-2y} \times \frac{1}{(1+y)^2}dy = \frac{1}{2} < +\infty\,.$$
Nous pouvons donc appliquer le théorème central-limite. Le n que nous cherchons doit vérifier
$$\mathbb{P}\left(|Z| \geq \frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) \leq \delta$$
avec $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$. Ce qui est équivalent à (en utilisant les symétries de la gaussienne)
$$\mathbb{P}\left(Z \leq \frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) \leq 1 - \frac{\delta}{2} = 0,995\,.$$
Nous trouvons dans la table de la loi normale que n doit vérifier
$$\frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sigma} \geq 2,58$$
c'est à dire
$$n \geq (2,58)^2 \times \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}\,.$$

Exercice 2. (1) On utilise la méthode par inversion de la fonction de répartition. La fonction de répartition de g est
$$x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)(1-\exp(-x/2))\,.$$
Nous pouvons calculer facilement son pseudo-inverse sur $[0;1]$:
$$G^{-1}\,:\,u \in [0;1] \mapsto -2\log(1-u)\,.$$
Si $U \sim \mathcal{U}([0;1])$, nous avons pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G^{-1}(U) \leq x) &= \mathbb{P}(U \leq G(x)) \\ &= G(x)\end{aligned}$$
donc $G^{-1}(U)$ est de loi de densité g. Voir l'algorithme 2.

Algorithme 2 Simulation

```
u=runif(1,0,1)
x=-2*log(1-u)
```

(2) Pour $x > 0$, nous avons

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2}{K} \exp\left(-\frac{x}{2} + \sqrt{x}\right) .$$

Soit $h(x) = -\frac{x}{2} + \sqrt{x}$ (pour $x > 0$). Nous avons :

$$h'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} .$$

D'où le tableau de variation (tableau 1). Donc, pour tout $x > 0$,

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

Table 1. Tableau de variation

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{2}{K} e^{1/2} .$$

Nous prenons donc $C = 2\exp(1/2)/K$.

(3) Nous utilisons la méthode du rejet (voir algorithme 3). Nous tirons X de loi de densité g et $V \sim \mathcal{U}([0;1])$. La condition d'arrêt est

$$V \times Cg(X) \leq f(X) ,$$

c'est à dire

$$V \times (2e^{1/1}) \times g(x) \leq \exp(-x + \sqrt{x}) .$$

Algorithme 3 Méthode de rejet

```
b=0
while (b==0)
{
  u=runif(1,0,1)
  x=-2*log(1-u)
  v=runif(1,0,1)
  if (v*2*exp(1/2)*exp(-x/2)*0.5<exp(-x+sqrt(x)))
  {
    b=1
  }
}
print(x)
```

Exercice 3. (1) Calculons

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x)dx &= 2\int_0^{+\infty} \frac{3}{2} x^2 e^{-x^3} dx \\ &= \left[e^{-x^3}\right]_0^{+\infty} \\ &= 1 . \end{aligned}$$

Donc f est bien une densité de probabilité.

(2) Nous avons

$$\mathbb{E}(|X|) = \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^3} dx$$

et

$$x^3 e^{-x^3} \underset{x\to+\infty}{\ll} e^{-x}$$

donc $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$. Nous pouvons donc appliquer la loi des grands nombres. Si X_1, X_2, ... sont i.i.d. de même loi que X, alors

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |X_i| \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow}} I\,.$$

(3) Nous proposons la fonction d'importance

$$\widetilde{f}_1(x) = |x|^3 e^{-|x|}\,,$$

que nous renormalisons pour avoir une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$. Pour cela, il faut calculer (par intégrations par parties)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \widetilde{f}_1(x)dx &= 2\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx \\
&= [-2x^3e^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 6x^2 e^{-x} dx \\
&= [-6x^2e^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 12x e^{-x} dx \\
&= [-12xe^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 12 e^{-x} dx \\
&= 12\,.
\end{aligned}$$

Nous posons donc

$$\widetilde{f}(x) = \frac{\widetilde{f}_1(x)}{12}\,.$$

La fonction $\widetilde{f}$ est proche de $x \mapsto |x| \times f(x)$ (à une constante multiplicative près). Si nous tirons $Y_1, Y_2, \dots$ i.i.d. de loi de densité $\widetilde{f}$, alors, par la loi des grands nombres

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{|Y_i| f(Y_i)}{\widetilde{f}(Y_i)} \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow}} I$$

(les variables dont nous faisons la somme sont bien L^1 puisque I est bien définie). Et cette méthode devrait être de variance plus petite que la méthode précédente.

(4) On compare $\widetilde{f}$ à la densité

$$h\,:\, x\in\mathbb{R} \mapsto \frac{\exp\left(-\frac{|x|}{2}\right)}{4}\,.$$

La fonction

$$x \mapsto \frac{|x|^3 e^{-|x|}}{e^{-|x|/2}}$$

est bornée sur $\mathbb{R}$ (parce que l'exponentielle est plus forte que la puissance 3). Donc un peut simuler suivant $\widetilde{f}$ avec une méthode de rejet (dans laquelle on propose avec la densité h).

(5) Voir algorithme 4.

Algorithme 4 Fonction d'importance

```
ftilde<-function(x)
{
  x=abs(x)
  return(x^3*exp(-x)/12)
}
f<-function(x)
{
  x=abs(x)
  return(1.5*x^2*exp(-x^3))
}
n=1000
s=0
for (i in 1:n)
{
  x=variable de densité ftilde
  x=abs(x)
  s=s+x*f(x)/ftilde(x)
}
print(s/n)
```

Exercice 4. (1) Calculons

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X^+ = x^+ | X^- = x^-) &= \frac{\pi(x^+, x^-)}{\pi(x^-)} \\
&= \frac{\exp\left(-\frac{\beta}{2} \sum_{m\in\Lambda^+} \sum_{m'\in\Lambda^-, |m-m'|=1} x^+(m)^2 + x^-(m')^2 - \gamma x^+(m) x^-(m')\right)}{\sum_{y:y^-=x^-} \exp\left(-\frac{\beta}{2} \sum_{m\in\Lambda^+} \sum_{m'\in\Lambda^-, |m-m'|=1} y^+(m)^2 + x^-(m')^2 - \gamma y^+(m) x^-(m')\right)} \\
&= \frac{\exp\left(-\frac{\beta}{2} \sum_{m\in\Lambda^+} \sum_{m'\in\Lambda^-, |m-m'|=1} 1 + 1 - \gamma x^+(m) x^-(m')\right)}{\sum_{y:y^-=x^-} \exp\left(-\frac{\beta}{2} \sum_{m\in\Lambda^+} \sum_{m'\in\Lambda^-, |m-m'|=1} 1 + 1 - \gamma y^+(m) x^-(m')\right)} \\
&= \frac{\prod_{m\in\Lambda^+} \exp\left(\frac{\gamma\beta}{2} x^+(m) \sum_{m'\in\Lambda^-, |m-m'|=1} x^-(m')\right)}{\sum_{y:y^-=x^-} \exp\left(\frac{\gamma\beta}{2} \sum_{m\in\Lambda^+} \sum_{m'\in\Lambda^-, |m-m'|=1} y^+(m) x^-(m')\right)} \\
&\propto \prod_{m\in\Lambda^+} \exp\left(\frac{\gamma\beta}{2} x^+(m) \sum_{m'\in\Lambda^-, |m-m'|=1} x^-(m')\right).
\end{aligned}$$

En particulier, pour tout $m \in \Lambda^+$, $X^+(m)$ conditionnellement à X^- est indépendant des $X^+(m'')$, $m'' \neq m$, et

$$\mathbb{P}(X^+(m) = x^+(m) | X^- = x^-) \propto \exp\left(\frac{\gamma\beta}{2} x^+(m) \sum_{m'\in\Lambda^-, |m-m'|=1} x^-(m')\right).$$

(2) Voir l'algorithme 5. Notons Y^+, Y^- les composantes de la variable `y` renvoyée par l'algo-

Algorithme 5 Simulation transition.

```
# xm et xp sont les composantes de x
u=runif(1,0,1)
if (u<0.5)
{
  yp={variable de loi pi(.|xm)}
  y=(yp,xm)
}
else
{
  ym={variable de loi pi(.|xp)}
  y=(xp,ym}
}
print(y)
```

rithme. Nous calculons sur une fonctions test φ

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\varphi(Y^+,Y^-)) &= \mathbb{E}(\varphi(Y^+,Y^-)\mathbb{1}_{[0;1/2[}(U)+\varphi(Y^+,Y^-)\mathbb{1}_{[1/2;1]}(U)) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\varphi(Y^+,Y^-)|U<1/2)\mathbb{1}_{[0;1/2[}(U)+\mathbb{E}(\varphi(Y^+,Y^-)|U\geq 1/2)\mathbb{1}_{[1/2;1]}(U)) \\
&= \mathbb{E}(\sum_{y^+}\pi(y^+|x^-)\varphi(y^+,x^-)\times\mathbb{1}_{[0;1/2[}(U)+\sum_{y^-}\varphi(x^+,y^-)\pi(y^-|x^+)\times\mathbb{1}_{[1/2;1]}(U)) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{y^+}\pi(y^+|x^-)\varphi(y^+,x^-)+\frac{1}{2}\sum_{y^-}\varphi(x^+,y^-)\pi(y^-|x^+)\,.
\end{aligned}$$

Donc l'algorithme simule bien suivant la loi voulue.