M1 IM - Méthodes de simulation stochastique (Monte-Carlo)
2015-2016
NOM :
PRÉNOM :

Contrôle no 3, sujet A (durée 3h)

Documents, téléphones et calculatrices interdits. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. On ne tiendra pas compte dans la correction des erreurs de syntaxe en R.

Préliminaires

Rendre la feuille avec la copie.

Exercice 1. On s'intéresse à

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x+1}(x+1)} dx \,.$$

(1) Proposer deux manières de calculer I de manière approchée en utilisant la méthode de Monte-Carlo.

(2) Écrire un programme en `R` qui calcule I par Monte-Carlo en faisant une somme de variables de carré intégrable. On notera σ^2 la variance de cette méthode.

(3) Trouver un nombre de boucles n (qui s'écrit comme une fonction de σ^2) telle que la méthode ci-dessus approche I à $0,02$ près avec une probabilité $\geq 0,99$ (il n'est pas nécessaire de simplifier l'expression trouvée).

Exercice 2. Soit la densité de probabilité

$$f \,:\, x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{K} \exp(-x + \sqrt{x}) \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)$$

(la constante K est choisie pour que $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$). Soit

$$g \,:\, x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\exp\left(-\frac{x}{2}\right)}{2} \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x) \,.$$

(1) Écrire un programme en `R` qui simule suivant la densité g (refaire la démonstration du cours pour montrer que le programme simule bien ce que l'on veut).

(2) Trouver une constante C telle que $f(x) \leq Cg(x)$ pour tout $x > 0$.

(3) Écrire un programme en `R` qui simule une variable aléatoire de densité f.

Exercice 3. (1) Montrer que

$$f \,:\, x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{3}{2} x^2 \exp\left(-|x|^3\right)$$

est un densité de probabilité.

(2) Soit X variable aléatoire de loi de densité f. Proposer une méthode de Monte-Carlo pour calculer $\mathbb{E}(|X|)$ de manière approchée.

(3) Proposer une méthode de fonction d'importance qui pourrait réduire la variance. Nous noterons $\widetilde{f}$ la densité de probabilité d'importance.

(4) Expliquer pourquoi on peut simuler suivant $\widetilde{f}$ (par exemple en utilisant une méthode de rejet). On suppose dans la suite que l'on sait simuler suivant $\widetilde{f}$.

(5) Écrire un programme en `R` qui calcule $\mathbb{E}(|X|)$ de manière approchée en utilisant la réduction de variance de la question précédente.

Exercice 4. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit

$$\Lambda = \{-N, -N+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N\}^2 \subset \mathbb{Z}^2 .$$

Soit

$$E = \{-1; +1\}^\Lambda$$

(il s'agit donc des fonctions $f : \Lambda \to \{-1; +1\}$). Pour $m = (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2$, on note $|m| = |m_1| + |m_2|$. Pour x dans E, nous notons

$$H(x) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{m, m' \in \Lambda \\ |m-m'|=1}} x(m)^2 + x(m')^2 - \gamma x(m) x(m') ,$$

où $\gamma \in]-2; 2[$ est un paramètre fixé. Soit $\beta > 0$, nous définissons la probabilité sur E

$$\pi(x) = \frac{\exp(-\beta H(x))}{Z(\beta)} ,$$

avec $Z(\beta) = \sum_{x \in E} e^{-\beta H(x)}$. Nous définissons une partition de Λ en

$$\Lambda^+ = \{(m_1, m_2) \in \Lambda,\, m_1 + m_2 \text{ pair}\} ,$$
$$\Lambda^- = \{(m_1, m_2) \in \Lambda,\, m_1 + m_2 \text{ impair}\} .$$

Pour x dans E, nous notons

$$x^+ = (x(m), m \in \Lambda^+) ,$$
$$x^- = (x(m), m \in \Lambda^-) .$$

Nous écrivons $x = (x^+, x^-)$.

(1) Soit X une variable de loi π. Pour x^+, x^-, on note $\mathbb{P}(X^+ = x^+ | X^- = x^-) = \pi(x^+ | x^-)$. On suppose que x^- est fixé, montrer qu'il existe une constante C telle que, $\forall x^+ \in \Lambda^+$, $\forall m \in \Lambda^+$

$$\mathbb{P}(X^+(m) = x^+(m) | X^- = x^-) = C \exp\left(\frac{\beta\gamma}{2} x^+(m) \sum_{m' \in \Lambda^-} x^-(m) \right) .$$

(2) On suppose que l'on sait simuler suivant les lois $\pi(.|x^+)$, $\pi(.|x^-)$ pour tous x^+, x^-. Nous définissons une transition Q sur E par

$$Q(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi(y^+|x^-) & \text{si } y^- = x^-, \\ \frac{1}{2}\pi(y^-|x^+) & \text{si } y^+ = x^+, \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Soit $x \in E$. Écrire un programme en `R` qui permet de simuler une variable de loi $Q(x, .)$.