M1 IM - Méthodes de simulation stochastique (Monte-Carlo)
2015-2016

Corrigé du contrôle no 3, sujet B (durée 3h)

*Documents, téléphones et calculatrices interdits. La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. On n'a pas tenu compte dans la correction des erreurs de syntaxe en **R**.*

Exercice 1. (1) Nous avons
$$x^2 e^{-\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
donc I est bien définie. Si $X \sim \mathcal{E}(1)$ alors
$$\mathbb{E}\left(e^{X-\sqrt{X}}\right) = \int_0^{+\infty} e^{x-\sqrt{x}} e^{-x} dx = I\,.$$
La fonction $x \in \mathbb{R}^+ \mapsto e^{x-\sqrt{x}}$ est positive, donc l'égalité ci-dessus montre que la variable $e^{X-\sqrt{X}}$ est L^1. Si nous prenons $X_1, X_2, \dots$ i.i.d. de même loi que X, la loi des grands nombres nous dit que
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{X_i-\sqrt{X_i}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} I\,.$$
Nous pouvons aussi écrire
$$I = \int_0^{+\infty} (1+x)^2 e^{-\sqrt{x}} \times \frac{1}{(1+x)^2} dx\,.$$
Donc, si Y est de loi de densité
$$x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)\frac{1}{(1+x)^2}\,,$$
alors
$$\mathbb{E}\left((1+Y)^2 e^{-\sqrt{Y}}\right) = I$$
(la variable $(1+Y)^2 e^{-\sqrt{Y}}$ est L^1 car elle est positive et I est bien définie).

(2) Notons f la densité de Y. La fonction de répartition de Y est
$$F\,:\, x \in \mathbb{R} \mapsto 1 - \frac{1}{1+x}\,.$$
On calcule son pseudo-inverse sur $[0;1]$:
$$F^{-1}(u) = \frac{1}{1-u} - 1\,.$$
Donc, d'après le cours, si $U \sim \mathcal{U}([0;1])$, alors
$$\frac{1}{1-U} - 1$$
est de loi de densité f. Nous pouvons donc calculer I par l'algorithme 1. Nous remarquons

Algorithme 1 Monte-Carlo
```
n=1000
s=0
for (i in 1:n)
{
  u=runif(1,0,1)
  y=1/(1-u)-1
  s=s+(1+y)^2*exp(-sqrt(y))
}
print(s/n)
```

que

$$\mathbb{E}(Y^2) = \int_0^{+\infty} (1+x^2)^4 e^{-2\sqrt{x}} \times \frac{1}{(1+x)^2} dx < +\infty$$

car

$$x^2 \times (1+x^2)^2 e^{-2\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Nous notons

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(Y)\,.$$

(3) Soient $\epsilon = 0,01$ et $\delta = 0,05$. Notons $f(x) = (1+x)^2 e^{-\sqrt{x}}$ pour tout x. Nous voulons

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{f(Y_1)+\dots+f(Y_n)}{n} - I\right| \geq \epsilon\right) \leq \delta\,,$$

c'est à dire

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left|\frac{f(Y_1)+\dots+f(Y_n)}{n} - I\right| \geq \frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) \leq \delta\,.$$

Nous avons

$$\sigma^2 = \int_0^{+\infty} (1+y)^2 e^{-2y} \times \frac{1}{(1+y)^2} dy = \frac{1}{2} < +\infty\,.$$

Nous pouvons donc appliquer le théorème central-limite. Le n que nous cherchons doit vérifier

$$\mathbb{P}\left(|Z| \geq \frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) \leq \delta$$

avec $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$. Ce qui est équivalent à (en utilisant les symétries de la gaussienne)

$$\mathbb{P}\left(Z \leq \frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) \leq 1 - \frac{\delta}{2} = 0,975\,.$$

Nous trouvons dans la table de la loi normale que n doit vérifier

$$\frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sigma} \geq 1,96$$

c'est à dire

$$n \geq (1,96) \times \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}\,.$$

Exercice 2. (1) Nous calculons (changement de variable $u = \log(x)$)

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{\log(x)}{x} \exp\left(-\frac{(\log(x))^2}{2}\right) dx &= \int_0^{+\infty} u e^{-u} e^{-u^2/2} e^u du \\
&= \int_0^{+\infty} u e^{-u^2/2} du \\
&= [-e^{-u^2/2}]_0^{+\infty} \\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

La fonction en question étant positive, c'est bien une densité de probabilité.

(2) Calculons la fonction de répartition (pour $x \geq 0$) :

$$\begin{aligned}
G(x) &= \int_1^x \frac{\log(t)}{t} \exp\left(-\frac{(\log(t))^2}{2}\right) dt \\
&= \int_0^{\log(x)} u e^{-u^2/2} du \\
&= [-e^{-u^2/2}]_0^{\log(x)} \\
&= 1 - \exp\left(-\frac{(\log(x))^2}{2}\right)\,.
\end{aligned}$$

Nous calculons le pseudo-inverse en résolvant

$$\begin{aligned} u &= 1-\exp\left(-\frac{(\log(x))^2}{2}\right) \\ 1-u &= \exp\left(-\frac{(\log(x))^2}{2}\right) \\ \log(1-u) &= -\frac{(\log(x))^2}{2} \\ \exp\left(\sqrt{2\log(1-u)}\right) &= x\,. \end{aligned}$$

D'après le cours, si $U \sim \mathcal{U}([0;1])$, alors

$$\exp\left(\sqrt{2\log(1-u)}\right)$$

est de loi de densité g.

(3) Nous avons, pour tout $x > 1$,

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{x-1}{K\log(x)}\exp\left(-\log(x)^3+\log(x)\right) \\ &\leq \frac{1}{K}\exp(-\log(x)^3+\log(x))\,. \end{aligned}$$

Étudions

$$h\,:\,u \geq 0 \mapsto -u^3+u\,.$$

Nous avons $h'(u) = -3u^2+1$. D'où le tableau de variation (tableau 1). D'où

x	0		$\sqrt{\frac{2}{3}}$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	$-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\searrow$	0

Table 1. Tableau de variation

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{1}{K}\exp\left(-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\,.$$

Nous prenons

$$C = \frac{1}{K}\exp\left(-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\,.$$

(4) Nous utilisons la méthode du rejet. Nous tirons des X de loi de densité g et des $U \sim \mathcal{U}([0;1])$. La condition d'arrêt est

$$\begin{aligned} U \times Cg(X) &\leq f(X) \\ U\times\exp\left(-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\ \frac{\log(X)}{X}\exp\left(-\frac{(\log(X))^2}{2}\right) &\leq (x-1)\exp\left(-\frac{(\log(x))^2}{2}-(\log(x))^3\right)\,. \end{aligned}$$

Voir l'algorithme 2.

Exercice 3. (1) Cette fonction est bien positive et nous calculons

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} 3x^2e^{-x^3}dx &= [-e^{-x^3}]_0^{+\infty} \\ &= 1\,. \end{aligned}$$

Algorithme 2 Méthode de rejet

```
f1<-function(x)
{
  return((x-1)*exp(-(log(x))^2/2-(log(x))^3))
}
g<-function(x)
{
  return((log(x)/x)*exp(-(log(x))^2/2)
}
b=0
while (b==0)
{
  u=runif(1,0,1)
  x=exp(sqrt(2*log(1-u)))
  v=runif(1,0,1)
  if (v*exp(-(2/3)^(3/2)+(2/3)^(1/2))*g(x)<f1(x))
  {
    b=1
  }
}
print(x)
```

(2) Nous calculons

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx &= [-x^3e^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 3x^2 e^{-x} dx \\ &= [-3x^2e^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 6x e^{-x} dx \\ &= [-6xe^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 6 e^{-x} dx \\ &= 6\,.\end{aligned}$$

Donc $K = 6$.

(3) Nous calculons la fonction de répartition de f, pour $x \geq 0$:

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_0^x 3t^2 e^{-t^3} dt \\ &= [-e^{-t^3}]_0^x \\ &= 1 - e^{-x^3}\,.\end{aligned}$$

Nous calculons son pseudo-inverse sur $[0;1]$:

$$F^{-1}(u) = (-\log(1-u))^{1/3}\,.$$

Nous savons donc que si $U \sim \mathcal{U}([0;1])$, alors $F^{-1}(U)$ est de loi de densité f. De plus

$$\mathbb{E}(|X|) = \mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} 3x^3 e^{-x^3} dx < +\infty$$

car

$$x^2 \times 3x^3 e^{-x^3} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Si nous prenons $X_1, X_2, \dots$ i.i.d. de même loi que X, alors la loi des grands nombres nous dit que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow}} \mathbb{E}(X)\,.$$

(4) Nous écrivons
$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \frac{3x^3 e^{-x^3}}{\widetilde{f}(x)} \widetilde{f}(x) dx \,.$$
Si nous tirons $Y_1, Y_2, \dots$ i.i.d. de loi de densité $\widetilde{f}$, alors, par la loi des grands nombres (puisque l'intégrale ci-dessus est bien définie)
$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{3Y_i^3}{\widetilde{f}(Y_i)} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} \mathbb{E}(X) \,.$$

(5) Voir l'algorithme 3.

Algorithme 3 Fonction d'importance

```
ftilde<-function(x)
{
  return(x^3*exp(-x)/6)
}
f<-function(x)
{
  return(3*x^2*exp(-x^3))
}
n=1000
s=0
for (i in 1:n)
{
  x={variable de densité ftile}
  s=s+x*f(x)/ftilde(x)
}
print(s/n)
```

Exercice 4. (1) Soient σ, σ' tels que $\exists i, j$ avec $i \neq j$, $\sigma(i) = \sigma'(j)$, $\sigma(j) = \sigma'(i)$. Alors
$$Q(\sigma, \sigma') = Q(\sigma', \sigma) = \frac{1}{C_{2N}^2} \,.$$
Soient σ et σ' ne vérifiant pas la condition ci-dessus, alors
$$Q(\sigma, \sigma') = Q(\sigma', \sigma) = 0 \,.$$
Donc Q est symétrique.
La donnée d'une permutation σ est équivalente à la donnée de $l(\sigma) = (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(2N))$. Le noyau Q prend deux éléments au hasard dans la liste et les échanges. Donc, en partant de $l(\sigma)$ (ou, de manière équivalente, de σ), on peut accéder à toutes les liste obtenues en faisant des échanges entre deux éléments de la liste. Donc on peut aller de $l(\sigma)$ à $(1, 2, 3, \dots, 2N)$ (et inversement). Donc tous les éléments σ, σ' communiquent (par Q).

(2) Voir l'algorithme 4.

(3) Voir l'algorithme 5

(4) Voir l'algorithme 6. On remarque que la constante K n'apparaît pas dans le calcul du rapport d'acceptation.

Algorithme 4 Fonction ψ.

```
psi<-function(sigma)
{
  s1=0
  s2=0
  for (i in 1:(2*N))
  {
    if (sigma[i]<i)
      { s1=s1+1 }
    if (sigma[i]>i)
      { s2=s2+1 }
  }
  return(abs(s1-s2))
}
```

Algorithme 5 Transition

```
transition<-function(sigma)
{
  x=1:(2*N)
  u=sample(x,2)
  sigmap=sigma
  sigmap[u[1]]=sigma[u[2]]
  sigmap[u[2]]=sigma[u[1]]
  return(sigmap)
}
```

Algorithme 6 Metropolis

```
n=100
sigma=1:(2*N)
for (i in 1:n)
{
  sigmap=transition(sigma)
  u=runif(1,0,1)
  alpha=min(1,exp(-psi(sigmap))/exp(-psi(sigma)))
  if (u<alpha)
    { sigma=sigmap }
  print(sigma)
}
```