M1 IM - Méthodes de simulation stochastique (Monte-Carlo)
2015-2016
NOM :
PRÉNOM :

Contrôle no 3, sujet B (durée 3h)

Documents, téléphones et calculatrices interdits. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. On ne tiendra pas compte dans la correction des erreurs de syntaxe en `R`*.*

Préliminaires

Rendre la feuille avec la copie.

Exercice 1. On s'intéresse à

$$I = \int_0^{+\infty} \exp\left(-\sqrt{x}\right) dx\,.$$

(1) Proposer deux manières de calculer I de manière approchée en utilisant la méthode de Monte-Carlo.

(2) Écrire un programme en `R` qui calcule I par Monte-Carlo en faisant une somme de variables de carré intégrable. On notera σ^2 la variance de cette méthode.

(3) Trouver un nombre de boucles n (qui s'écrit comme une fonction de σ^2) telle que la méthode ci-dessus approche I à $0,01$ près avec une probabilité $\geq 0,95$ (il n'est pas nécessaire de simplifier l'expression trouvée).

Exercice 2. (1) Soit

$$g\,:\,x\in\mathbb{R}\mapsto \mathbb{1}_{[1;+\infty[}(x)\frac{\log(x)}{x}\exp\left(-\frac{(\log(x))^2}{2}\right)\,.$$

Montrer que g est une densité de probabilité.

(2) Proposer une méthode pour simuler une variable aléatoire de loi de densité g.

(3) Soit la densité de probabilité

$$f\,:\,x\in\mathbb{R}\mapsto \frac{\mathbb{1}_{[1;+\infty[}(x)}{K}(x-1)\exp\left(-\frac{(\log(x))^2}{2}-(\log(x))^3\right)$$

(K est la constante qui fait que c'est bien une densité). Trouver une constante C telle que

$$f(x)\leq Cg(x)\,,\ \forall x\geq 1$$

(la constante C pourra dépendre de K).

(4) Écrire un programme en `R` qui simule une loi de densité f.

Exercice 3. (1) Montrer que

$$f\,:\,x\in\mathbb{R}\mapsto \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)\times 3x^2\exp\left(-x^3\right)$$

est un densité de probabilité.

(2) Trouver une constante K telle que

$$\widetilde{f}\,:\,x\in\mathbb{R}\mapsto \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)\times\frac{x^3}{K}\exp(-x)$$

soit une densité de probabilité.

(3) Soit X une variable aléatoire de loi de densité f. Proposer une méthode de Monte-Carlo pour calculer $\mathbb{E}(X)$ de manière approchée.

(4) On suppose que l'on sait simuler suivant la loi de densité $\widetilde{f}$. Proposer une méthode de fonction d'importance pour réduire la variance.

(5) Écrire un programme en `R` qui calcule $\mathbb{E}(X)$ de manière approchée en utilisant la réduction de variance de la question précédente.

Exercice 4. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse aux permutations de $\{1, 2, \dots, 2N\}$ (c'est à dire $\{\sigma : \{1, 2, \dots, 2N\} \to \{1, 2, \dots, 2N\}$, telle que σ bijective$\}$). Nous notons $\mathfrak{S}_{2N}$ cet ensemble de permutations. Soit la fonction ψ,

$$\psi : \sigma \in \mathfrak{S}_{2N} \mapsto \psi(\sigma) = |\#\{x \in \{1, 2, \dots, 2N\} : \sigma(x) > x\} - \#\{x \in \{1, 2, \dots, 2N\} : \sigma(x) < x\}|$$

(# veut dire cardinal). On s'intéresse à la densité de probabilité

$$\pi(\sigma) = \frac{1}{K} \exp\left(-\psi(x)\right)$$

(K est la constante telle que ce soit bien une densité de probabilité).

(1) Pour $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_{2N}$ tels que $\exists i, j \in \{1, 2, \dots, 2N\}$ tels que $i \neq j$, $\sigma(i) = \sigma'(j)$, $\sigma(j) = \sigma'(j)$, $\forall k \in \{1, 2, \dots, 2N\} \backslash \{i, j\}$, $\sigma(k) = \sigma'(k)$, nous définissons

$$Q(\sigma, \sigma') = \frac{1}{C_{2N}^2}\,.$$

Pour $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_{2N}$ ne vérifiant pas les conditions ci-dessus, nous posons $Q(\sigma, \sigma') = 0$. Ce noyau Q est un noyau de transition. Montrer que Q est irréductible et symétrique.

(2) Écrire une fonction `R` qui calcule la fonction ψ d'une permutation (on pourra coder une permutation σ par la suite $(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(2N))$).

(3) Écrire une fonction `R` qui simule une variable de loi $Q(\sigma, .)$ pour une permutation σ donnée. On remarquera que, pour toute σ,

$$C_{2N}^N = \#\{\sigma' \in \mathfrak{S}_{2N} : \exists i \neq j \text{ tels que } \sigma(i) = \sigma'(j), \sigma(j) = \sigma'(i), \forall k \in \{1, 2, \dots, 2N\} \backslash \{i, j\}, \sigma(k) = \sigma'(k)\}\,.$$

(4) Écrire un programme `R` qui simule une chaîne de Metropolis de loi de proposition Q et de densité cible π.