Corrigé du contrôle no 3, sujet A (durée 2h)

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1.

(1) Nous calculons pour tout t (en utilisant les propriétés des $(\epsilon_j)_{j\in\mathbb{Z}}$)

$$\mathbb{E}\left(\left(\sum_{k\geq 0}\frac{1}{2^k}\left(X_{t-k}+\frac{X_{t-k}-1}{6}-\frac{X_{t-k-2}}{3}\right)\right)^2\right)=\mathbb{E}\left(\left(\sum_{k\geq 0}\frac{1}{2^k}\left(\epsilon_{t-k}-\frac{\epsilon_{t-k-2}}{4}\right)\right)^2\right)$$

$$=\sum_{k\geq 0}\mathbb{E}(\epsilon_{t-k}^2)\left(\frac{1}{2^k}-\frac{1}{4}\frac{1}{2^{k-2}}\mathbb{1}_{k\geq 2}\right)^2$$

$$<+\infty \text{ car série géométrique.}$$

Donc la variable

$$\sum_{k\geq 0}\frac{1}{2^k}\left(X_{t-k}+\frac{X_{t-k-1}}{6}-\frac{X_{t-k-2}}{3}\right)$$

est finie presque sûrement.

(2) Nous avons pour tout t

$$\sum_{k\geq 0}\frac{1}{2^k}\left(X_{t-k}+\frac{X_{t-k-1}}{6}-\frac{X_{t-k-2}}{3}\right)=X_t+X_{t-1}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)$$

$$+\sum_{k\geq 2}X_{t-k}\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k-1}}\frac{1}{6}+\frac{1}{2^{k-2}}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$=X_t+X_{t-1}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)$$

$$+\sum_{k\geq 2}\frac{X_{t-k}}{2^k}\left(1+2\times\frac{1}{6}+4\times\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$=X_t+X_{t-1}\times\frac{2}{3}\,.$$

(3) Nous avons pour tout t

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{2^k}\left(X_{t-k}+\frac{X_{t-k-1}}{6}-\frac{X_{t-k-2}}{3}\right) &= \sum_{k\geq 0}\frac{1}{2^k}\left(\epsilon_{t-k}-\frac{\epsilon_{t-k-2}}{4}\right)\\ &= \epsilon_t+\frac{\epsilon_{t-1}}{2}+\sum_{k\geq 2}\epsilon_{t-k}\left(\frac{1}{2^k}-\frac{1}{4}\frac{1}{2^{k-2}}\right)\\ &= \epsilon_t+\frac{\epsilon_{t-1}}{2}\,.\end{aligned}$$

D'après le résultat de la question précédente, nous avons bien

$$X_t+X_{t-1}\times\frac{2}{3}=\epsilon_t+\frac{\epsilon_{t-1}}{2}\,.$$

Exercice 2. Voir Algorithme 1.

Exercice 3.

(1) `acf(x,lag=50);acf(x2,lag=50)` (on note `x2` pour $\Delta^2 x$)

Algorithme 1 Programme pour l'exercice 2

```
p=1; q=0
out<-arima(x,order=c(p,0,q))
min=out$aic
for (i in 0:3)
{
  for (j in 0:3)
  {
    if (i+j>0)
    {
      out<-arima(x,order(i,0,j))
      if (out$aic<min)
      {
        p=i;q=j;min=out$aic
      }
    }
  }
}
cat("paramètres minimisant le critère AIC : p =",p,", q =",q)
```

(2) Les auto-corrélations s'annulent à partir du rang 3, tandis que les auto-corrélations partielles tendent vers 0 sans s'annuler. Le processus ressemble donc plus à MA(2).

(3) Le processus est donc un ARIMA(0,2,2).