M1 IM - Séries temporelles - 2016-2017
http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html

Corrigé du contrôle no 3, sujet B (durée 2h)

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. Voir l'algorithme 1.

Algorithme 1 Programme

```
al=1/10 s=0
for (j in 50:99)
{
 xw=window(x,1,i)
 xlisse<-HoltWinters(x,alpha=al,beta=al,gamma=FALSE)
 p<-predict(xlisse,n.ahead=1)
 s=s+(p-x[i+1])^2
}
min=s
almin=al
for (i in 2:9)
{
 al=i/10;
 s=0
 for (j in 50:99)
 {
  xw=window(x,1,i)
  xlisse<-HoltWinters(x,alpha=al,beta=al,gamma=FALSE)
  p<-predict(xlisse,n.ahead=1)
  s=s+(p-x[i+1])^2
 }
 if (s<min)
 {
  min=s; almin=al
 }
}
cat("meilleur paramètre trouvé : alpha =",almin)
```

(1) Nous calculons pour tout t (en utilisant les propriétés des $(\epsilon_j)_{j\in\mathbb{Z}}$)

$$\mathbb{E}\left(\left(\sum_{k\geq 0}\left(\frac{3}{4}\right)^k\left(X_{t-k}-\frac{X_{t-k-1}}{4}-\frac{3X_{t-k-2}}{4}\right)\right)^2\right)$$

$$=\mathbb{E}\left(\left(\sum_{k\geq 0}\left(\frac{3}{4}\right)^k\left(\epsilon_{t-k}-\frac{5\epsilon_{t-k-1}}{4}+\frac{3\epsilon_{t-k-2}}{8}\right)\right)^2\right)$$

$$=\sum_{k\geq 0}\mathbb{E}(\epsilon_{t-k}^2)\left(\left(\frac{3}{4}\right)^k-\frac{5}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\mathbb{1}_{k\geq 1}+\frac{3}{8}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-2}\mathbb{1}_{k\geq 2}\right)^2$$

$< +\infty$ car série géométrique.

Donc la variable

$$\sum_{k\geq 0}\left(\frac{3}{4}\right)^k\left(X_{t-k}-\frac{X_{t-k-1}}{4}-\frac{3X_{t-k-2}}{4}\right)$$

est finie presque sûrement.

(2) Nous avons pour tout t

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0}\left(\frac{3}{4}\right)^k\left(X_{t-k}-\frac{X_{t-k-1}}{4}-\frac{3X_{t-k-2}}{4}\right) &= X_t+X_{t-1}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)\\ &+\sum_{k\geq 2}X_{t-k}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^k+\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\frac{(-1)}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^{k-2}\left(-\frac{3}{4}\right)\right)\\ &= X_t+\frac{X_{t-1}}{2}+\sum_{k\geq 2}X_{t-k}\left(\frac{3}{4}\right)^k\left(1-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\right)=X_t+\frac{X_{t-1}}{2}\,.\end{aligned}$$

(3) Nous avons pour tout t

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0}\left(\frac{3}{4}\right)^k\left(X_{t-k}-\frac{X_{t-k-1}}{4}-\frac{3X_{t-k-2}}{4}\right) &= \sum_{k\geq 0}\left(\frac{3}{4}\right)^k\left(\epsilon_{t-k}-\frac{5\epsilon_{t-k-1}}{4}+\frac{3\epsilon_{t-k-2}}{8}\right)\\ &= \epsilon_t+\epsilon_{t-1}\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{4}\right)+\sum_{k\geq 2}\epsilon_{t-k}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^k-\frac{5}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}+\frac{3}{8}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-2}\right)\\ &= \epsilon_t-\frac{\epsilon_{t-1}}{2}+\sum_{k\geq 2}\epsilon_{t-k}\left(\frac{3}{4}\right)^k\left(1-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}\right)=\epsilon_t-\frac{\epsilon_{t-1}}{2}\,.\end{aligned}$$

D'après le résultat de la question précédente, nous avons bien

$$X_t+\frac{X_{t-1}}{2}=\epsilon_t-\frac{\epsilon_{t-1}}{2}\,.$$

Exercice 2.

(1) `acf(x,lag=50);acf(x2,lag=50)` (on note `x2` pour $\Delta_1\Delta_{10}x$)

(2) Les auto-corrélations s'annulent à partir du rang 3, tandis que les auto-corrélations partielles tendent vers 0 sans s'annuler. Le processus ressemble donc plus à MA(2).