

Nom :

Prénom :

Contrôle no 1, sujet B (durée 1h30)

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. Le sujet est à rendre avec la copie. Si vous bénéficiez d'un tiers-temps, ne traitez que le premier exercice.

Exercice 1. Soient

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\exp(-x^4)}{Z},$$
$$g : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\exp(-x^2/(2\sigma^2))}{\sqrt{2\pi\sigma^2}},$$

avec $Z = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^4)dx$ et σ une constante > 0 .

- (1) Trouver une constante C telle que $f(x) \leq Cg(x)$ pour tout x dans \mathbb{R} .
- (2) Écrire un programme en R qui simule une variable de densité f (on prendra $\sigma = 2$) (écrire le programme dans le cadre ci-dessous et justifier sur la copie).

- (3) Quel est le nombre moyen de boucle effectuées par ce programme ?
- (4) Trouver σ minimisant le nombre de boucle effectuées par ce programme.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition

$$F : x \mapsto F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{e^x - 1}{e - 1} & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } 1 \leq x. \end{cases}$$

- (1) Calculer le pseudo-inverse F^{-1} de F .
- (2) Écrire un programme en \mathbb{R} permettant de simuler une variable de fonction de répartition F .