M1 IM - Simulation stochastique (Monte-Carlo) - 2016-2017
`http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Corrigé du contrôle no 1, sujet C (durée 1h30)

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1.

(1) La variable X est à valeurs dans $[0;1]$. Si $t \in [0;1]$, nous calculons :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq t) &= \mathbb{P}(U \leq t\,,\, V \leq 1/2) + \mathbb{P}(V \leq t\,,\, V > 1/2) \\ (U \perp\!\!\!\perp V) \quad &= \mathbb{P}(U \leq t)\mathbb{P}(V \leq 1/2) + \mathbb{1}_{]1/2;1]}(t)\mathbb{P}(1/2 < V \leq t) \\ &= \frac{t}{2} + \mathbb{1}_{]1/2;1]}(t) \times \left(t - \frac{1}{2}\right)\,. \end{aligned}$$

Donc, la fonction de répartition cherchée est

$$F\,:\, t \mapsto F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0\,, \\ \frac{t}{2} & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\,, \\ \frac{3t}{2} - \frac{1}{2} & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1\,, \\ 1 & \text{si } 1 \leq t\,. \end{cases}$$

(2) Pour u dans $[0;1]$, nous cherchons x tel que $F(x) = u$. Si $u \in [0;1/4]$, alors

$$u = \frac{1}{2}(2u)$$

avec $2u \in [0;1]$, donc $u = F(2u)$. Si $u \in [1/4;1]$, alors

$$u = \frac{3}{2}\left(\frac{2u+1}{3}\right) - \frac{1}{2}\,,$$

avec

$$\frac{2u+1}{3} \in \left[\frac{1}{2};1\right]\,,$$

donc

$$u = F\left(\frac{2u+1}{3}\right)\,.$$

Donc

$$F^{-1}\,:\, u \in [0;1] \mapsto F^{-1}(u) = \begin{cases} 2u & \text{si } u \in \left[0;\frac{1}{4}\right]\,, \\ \frac{2u+1}{3} & \text{si } u \in \left[\frac{1}{4};1\right]\,. \end{cases}$$

(3) Le lemme du cours sur l'inversion de la fonction de répartition nous dit que si $U \sim \mathcal{U}([0;1])$, alors $F^{-1}(U)$ est de fonction de répartition F. D'où le programme dans Algorithme 1.

Algorithme 1 Simulation à l'aide du pseudo-inverse

```
u=runif(1,0,1)
if (u<1/4)
{ z=2*u }
else
{ z=(2*u+1)/3 }
print(z)
```

Exercice 2.

(1) Nous remarquons que I est une intégrale sur un intervalle borné d'une fonction bornée, donc I est finie.
Si X_1, X_2, ... sont i.i.d. de loi $\mathcal{U}([0;1])$, alors
$$\mathbb{E}(\sin(X_1^2)) = I\,.$$
D'après la remarque précédente, $\sin(X_1^2)$ est bien intégrable. Donc, par la loi des grands nombres,
$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} I\,.$$
Ce qui nous fournit une premère méthode de Monte-Carlo.
Nous avons
$$I \quad = \quad \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\mathbb{1}_{[0;1]}(x)e^x \times e^{-x}dx\,.$$
Donc, si Y_1, Y_2, ... sont i.i.d. de loi $\mathcal{E}(1)$, alors
$$\mathbb{E}(\sin(Y_1^2)\mathbb{1}_{[0;1]}(Y_1)e^{Y_1}) = I\,.$$
La variable $\sin(Y_1^2)\mathbb{1}_{[0;1]}(Y_1)e^{Y_1}$ est intégrable d'après la remarque ci-dessus, donc, par la loi des grands nombres,
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sin(Y_i^2)\mathbb{1}_{[0;1]}(Y_i)e^{Y_i} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} I\,.$$
Ce qui nous fournit une deuxième méthode de Monte-Carlo.

(2) Nous utilisons la première méthode décrite ci-dessus. Voir Algorithme 2.

Algorithme 2 Calcul par Monte-Carlo.

```
n=1000
s=0
for (i in 1:n)
{
  u=runif(1,0,1)
  s=s+sin(u*u)
}
print(s/n)
```

(3) Nous voulons trouver n tel que
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sin(X_1^2) + \cdots + \sin(X_n^2)}{n} - I\right| \leq 0,02\right) \geq 0,99\,.$$
C'est à dire
$$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left|\frac{\sin(X_1^2) + \cdots + \sin(X_n^2)}{n} - I\right| \leq 0,02 \times \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) \geq 0,99\,.$$
D'après, le théorème central-limite, ceci est équivalent à
$$\mathbb{P}(|Z| \leq 0,02 \times \frac{\sqrt{n}}{\sigma}) \geq 0,99$$
avec $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$. C'est à dire (en utilisant les symétries de la densité de $\mathcal{N}(0;1)$)
$$\mathbb{P}(Z \leq 0,02 \times \frac{\sqrt{n}}{\sigma}) \leq 0,995\,.$$
Nous lisons sur la table qu'il suffit de prendre n tel que
$$0,02 \times \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \geq 2,58\,,$$
c'est à dire
$$n \geq \left(\frac{2,58 \times \sigma}{0,02}\right)^2\,.$$