M1 IM - Simulation stochastique (Monte-Carlo) - 2016-2017
http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html

Corrigé du contrôle no 1, sujet D (durée 1h30)

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1.

(1) Nous remarquons que

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\left|\frac{(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}e^{-x}\right|dx &\leq \int_0^{+\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)e^{-x}dx \\ &\leq \int_0^1 1+\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\int_1^{+\infty}2e^{-x}dx \\ &= [x+2\sqrt{x}]_0^1+[-2e^{-x}]_1^{+\infty} \\ &= 3+2e^{-1}<\infty\,.\end{aligned}$$

Donc I est bien définie.
Si X_1, X_2, ... sont i.i.d. de loi $\mathcal{E}(1)$, alors

$$\mathbb{E}\left(\frac{\sqrt{X_1}-1}{\sqrt{X_1}}\right)=I$$

(la variable $(\sqrt{X_1}-1)/\sqrt{X_1}$ est L^1 d'après la remarque ci-dessus). Donc, par la loi des grands nombres,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{\sqrt{X_i}-1}{\sqrt{X_i}}\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}}I\,.$$

Ce qui nous fournit une première méthode de Monte-Carlo.
Nous avons :

$$I = \int_0^{+\infty}\frac{(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}}e^x\times 2e^{-2x}dx\,.$$

Si Y_1, Y_2, ... sont i.i.d. de loi $\mathcal{E}(2)$, alors les variables

$$\frac{(\sqrt{Y_i}-1)}{2\sqrt{Y_i}}e^{Y_i}$$

sont L^1 d'après la remarque ci-dessus, et donc, par la loi des grands nombres,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{(\sqrt{Y_i}-1)}{2\sqrt{Y_i}}e^{Y_i}\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}}I\,.$$

Ce qui nous fournit une deuxième méthode de Monte-Carlo.

(2) Nous utilisons la première méthode ci-dessus (et nous utilisons la méthode du cours pour simuler des variables de loi $\mathcal{E}(1)$). Voir le programme dans Algorithme 1.

Algorithme 1 Méthode de Monte-Carlo

```
n=10000
s=0
for (i in 1:n)
{
  u=runif(1,0,1)
  x=-log(u)
  s=s+(sqrt(x)-1)/sqrt(x)
}
print(s/n)
```

(3) Nous cherchons δ tel que
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{X_i}-1}{\sqrt{X_i}}-I\right|\leq\delta\right)\geq 0,9\,.$$
C'est à dire
$$\mathbb{P}\left(-\delta\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\leq\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{X_i}-1}{\sqrt{X_i}}-I\right)\leq\delta\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right)\geq 0,9\,.$$
C'est à dire, d'après le théorème central-limite,
$$\mathbb{P}\left(-\delta\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\leq Z\leq\delta\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right)\geq 0,9$$
avec $Z\sim\mathcal{N}(0;1)$. En utilisant, les symétries de la densité gaussienne, ceci est équivalent à
$$\mathbb{P}\left(Z\leq\delta\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right)\geq 0,95\,.$$
Nous voyons sur la table qu'il suffit donc de prendre δ tel que
$$\delta\frac{\sqrt{n}}{\sigma}=1,65\,,$$
c'est à dire
$$\delta=\frac{1,65\times\sqrt{n}}{\sigma}\,.$$

Exercice 2.

(1) Nous calculons :
$$\begin{aligned}\int_{-2}^{0}\sqrt{-2x-x^2} &= \int_{-2}^{0}\sqrt{1-(-1-x)^2}dx\\ \text{(aire d'un demi-disque de rayon 1)} &= \frac{\pi}{2}\,,\end{aligned}$$
$$\int_{-2}^{0}\frac{1}{2}=1\,.$$
Donc f et g sont des densités de probabilité.

(2) Pour tout x dans $[-2;0]$,
$$\sqrt{-2x-x^2}\leq\sqrt{1-(-1-x)^2}\leq 1\,.$$
D'où l'inégalité voulue.

(3) Dans le programme, on simule U uniforme sur $[-2;0]$ (donc de densité g) et V uniforme jusqu'à ce que
$$V\times\frac{4}{\pi}\times g(U)\leq f(U)\,.$$
C'est donc la méthode du rejet. La variable aléatoire renvoyé par ce programme est de densité f.