M1 IM - Simulation stochastique (Monte-Carlo) - 2016-2017
`http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Corrigé du contrôle no 2, sujet A (durée 1h30)

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. Voir le cours

Exercice 2.

(1) Nous remarquons que

$$\int_{\mathbb{R}} |e^{-(x-2)^4}| \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx = 1 < \infty \,.$$

Donc, si X_1, X_2, ... sont i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0;1)$, alors, par la loi des grands nombres

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{-(X_i-2)^4} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} I \,.$$

Ce qui nous fournit une première méthode de Monte-Carlo.

(2) Nous proposons (comme fonction proche de $x \mapsto e^{-x^2/2} e^{-(x-2)^4}$)

$$\widetilde{f}_1(x) = e^{-x^2/2} e^{-(x-2)^2} \,.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \widetilde{f}_1(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{3}{2} \left(x - \frac{4}{3} \right)^2 + \frac{8}{3} - 4 \right) dx \\ &= \sqrt{2\pi} \exp\left(-\frac{4}{3} \right) . \end{aligned}$$

Soit $\widetilde{f}$ la densité de probabilité $x \in \mathbb{R} \mapsto \widetilde{f}_1(x) e^{4/3}/\sqrt{2\pi}$. C'est la densité de la de la loi $\mathcal{N}(4/3;1/3)$. Nous savons simuler suivant cette loi. Nous écrivons

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x^2/2} e^{-(x-2)^4}}{\sqrt{2\pi} \widetilde{f}(x)} \times \widetilde{f}(x) dx \,.$$

Nous remarquons que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{e^{-x^2/2} e^{-(x-2)^4}}{\sqrt{2\pi} \widetilde{f}(x)} \right| \times \widetilde{f}(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-2)^4} dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx \\ &= 1 < \infty \,. \end{aligned}$$

Donc, si Y_1, Y_2, ... sont i.i.d. de loi $\mathcal{N}(4/3;1/3)$, alors, par la loi des grands nombres,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{-Y_i^2/2} e^{-(Y_i-2)^4}}{\sqrt{2\pi} \widetilde{f}(Y_i)} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} I \,.$$

Ce qui nous fournit une deuxième méthode de Monte-Carlo.

(3) Voir l'algorithme 1.

(4) Voir l'algorithme 2(que nous écrivons à la suite du précédent).

Algorithme 1 Échantillonage préférentiel

```
ftilde<-function(x)
{
  return(exp(-x^2/3)*exp(-(x-2)^2)*exp(4/3)/sqrt(2*pi))
}
n=1000
s=0
for (i in 1:n)
{
  y=rnorm(1,4/3,1/3)
  s=s+(exp(-y^2/2)*exp(-(y-2)^4))/(sqrt(2*pi)*ftilde(y))
}
print(s/n)
```

Algorithme 2 Calcul de variance

```
v=0
for (i in 1:n)
{
  y=rnorm(1,4/3,1/3) ; z=rnorm(1,4/3,1/3)
  u1=exp(-y^2/2)*exp(-(y-2)^4)/(sqrt(2*pi)*ftilde(y))
  u2=exp(-z^2/2)*exp(-(z-2)^4)/(sqrt(2*pi)*ftilde(z))
  v=v+(u1-u2)^2
}
print(v/(2*n))
```