M1 IM - Simulation stochastique (Monte-Carlo) - 2016-2017
`http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Corrigé du contrôle no 2, sujet C (durée 1h30)

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. Voir corrigé de l'exercice 1 du sujet A du contrôle 1.

Exercice 2.

(1) Nous remarquons que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|\exp(|X|^{1/3})\mathbb{1}_{[1;+\infty[}(X)|) &= \int_1^{+\infty} \exp(x^{1/3})\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx \\
&\leq \int_1^{+\infty} \frac{\exp(x-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}}dx \\
&= 2\int \frac{\exp(-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2})}{\sqrt{2\pi}}dx \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2})}{\sqrt{2\pi}}dx \\
&= \frac{e^{1/2}}{\sqrt{2\pi}} < \infty\,.
\end{aligned}$$

Si nous prenons X_1, X_2, ... i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0;1)$ alors, vu l'inégalité ci-dessus et par la loi des grands nombres, nous avons

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \exp(|X_i|^{1/3})\mathbb{1}_{[1;+\infty[}(|X_i|) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} I\,.$$

Ce qui nous fournit une première méthode de Monte-Carlo.

(2) La densité est $f(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$. Nous intégrons la fonctions $g(x) = \exp(|x|^{1/3})\mathbb{1}_{[1;+\infty[}(x)$. Nous proposons la fonction $\widetilde{f}_1$, proche de $f \times g$:

$$\widetilde{f}_1(x) = \frac{\exp(x-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}}\,.$$

Nous calculons

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \widetilde{f}_1(x)dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(x-\frac{x^2}{2}\right)dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}\right)dx \\
&= e^{1/2}\,.
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}(x) &:= \frac{\widetilde{f}_1(x)}{\int_{\mathbb{R}}\widetilde{f}_1(x)dx} \\
&= \frac{\exp(x-x^2/2)}{e^{1/2}\sqrt{2\pi}} \\
&= \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x-1)^2\right)}{\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}$$

est la densité de la loi $\mathcal{N}(1;1)$. Nous savons simuler suivant cette loi. Nous remarquons que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f(x)g(x)}{\widetilde{f}(x)} \right| \widetilde{f}(x)dx &= \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x^2/1}e^{|x|^{1/3}}}{e^{-(x-1)^2/2}} \times \frac{e^{-(x-1)^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx \\ &= I < \infty\,.\end{aligned}$$

Donc, si nous prenons Y_1, Y_2, ... i.i.d. de loi $\mathcal{N}(1;1)$, alors

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{f(Y_i)g(Y_i)}{\widetilde{f}(Y_i)} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} I\,.$$

Ce qui nous fournit une deuxième méthode de Monte-Carlo.

(3) Voir l'algorithme 1.

Algorithme 1 Échantillonage préférentiel

```
ftilde<-function(x)
{ return(exp(-0.5*(x-2)^2)/sqrt(2*pi)) }
f<-function(x) { return(exp(-x^2/2)/sqrt(2*pi)) }
g<-function(x)
{
  z=0
  if (x>1)
  { z=exp(x^(1/3)) }
  return(z)
}
s=0
n=10000
for (i in 1:n)
{
  y=rnorm(1,1,1)
  s=s+f(y)*g(y)/ftilde(y)
}
print(s/n)
```

(4) Voir l'algorithme 2 (que nous écrivons à la suite du précédent).

Algorithme 2 Calcul de variance

```
v=0
for (i in 1:n)
{
  y=rnorm(1,1,1) ; z=rnorm(1,1,1)
  v=v+(f(y)*g(y)/ftilde(y)-f(z)*g(z)/ftilde(z))^2
}
print(v/(2*n))
```