M1 IM - Simulation stochastique (Monte-Carlo) - 2016-2017
`http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`
Nom :
Prénom :

Corrigé du contrôle no 3, sujet A (durée 2h)

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1.

(1) Les variables u sont de loi $\mathcal{U}([0;1])$. Soit φ une fonction continue bornée (nous refaisons ici une démonstration du cours), soit $U \sim \mathcal{U}([0;1])$ et $X = -\log(U)/\lambda$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\varphi(X)) &= \mathbb{E}(\varphi(-\log(U)/\lambda) \\ &= \int_0^1 \varphi(\frac{-\log(u)}{\lambda})du \\ \text{(changement de variable } -\log(u)/\lambda = v) \quad &= \int_{+\infty}^0 \varphi(v)(-\lambda)e^{-\lambda v}dv \\ &= \int_0^{+\infty} \varphi(v)\lambda e^{-\lambda v}dv\,. \end{aligned}$$

Donc $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

(2) Voir corrigé du sujet C du contrôle 2.

(3) Voir corrigé du sujet C du contrôle 2.

Exercice 2.

(1) Nous calculons, pour φ une fonction continue bornée,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\varphi(2\tan(\pi U/2))) &= \int_0^1 \varphi\left(2\tan\left(\frac{\pi u}{2}\right)\right)du \\ \text{(changement de variable } v = 2\tan(\pi u/2)) \quad &= \int_0^{+\infty} \varphi(v)\frac{1}{\pi}\times\frac{1}{1+\frac{v^2}{4}}dv\,. \end{aligned}$$

Donc la densité cherchée est bien g.

(2) Nous étudions la fonction

$$h\,:\,x\in\mathbb{R}_+ \mapsto h(x) = e^{-\sqrt{x}}(\sin(x))^2\left(1+\frac{x^2}{4}\right)\,.$$

Nous avons, pour tout $x \geq 0$,

$$h(x) \leq e^{-\sqrt{x}}\left(1+\frac{x^2}{4}\right) \leq 1 + e^{-\sqrt{x}}\times\frac{x^2}{4}\,.$$

Soit

$$\phi(x) = e^{-\sqrt{x}}\times\frac{x^2}{4}\,.$$

Nous avons

$$\phi'(x) = \frac{1}{4}\left(2x - x^2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)e^{-\sqrt{x}}\,.$$

D'où le tableau de variation dans la table 1. Donc, pour tout $x \geq 0$,

$$f(x) \leq Cg(x) \text{ avec } C = \frac{\pi}{Z}\left(1+e^{-4}\times 4^3\right)\,.$$

(3) Nous utilisons un algorithme d'acceptation-rejet. Nous remarquons que la constante Z se simplifie dans le ration $f(x)/(Cg(x))$. Voir le programme 1.

x	0		16		$+\infty$
$\phi'(x)$		$+$		$-$	
$\phi(x)$	0	$\nearrow$	$e^{-4}\times 4^3$	$\searrow$	0

TABLE 1. Tableau de variation

Programme 1 Acceptation-rejet

```
b=0
while (b==0)
{
  v=runif(1,0,1)
  u=runif(1,0,1)
  x=2*tan(0.5*pi*u)
  if (v<exp(-sqrt(x))*(sin(x))^2*(1+x^2/4)/(4^3*exp(-4)))
  { b=1}
}
print(x)
```

Exercice 3.

(1) La fonction ψ est paire donc $Z = 1 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} 2\exp(-\beta n)$, qui est finie parce que c'est la somme d'une série géométrique.

(2) Quand la chaîne de Metropolis est en x et que la proposition est y, cette proposition est acceptée avec probabilité

$$\inf\left(1, \frac{\pi(y)Q(y,x)}{\pi(x)Q(x,y)}\right) = \inf\left(1, \frac{\psi(y)Q(y,x)}{\psi(x)Q(x,y)}\right) .$$

Nous observons que la constante Z a disparu. Voir le programme 2.

Programme 2 Metropolis

```
beta=1
n=1000
x=0
print(x)
for (i in 1:n)
{
  u=rbinom(1,1,0.5) #Bernoulli de paramètre 1/2
  y=x+2*u-1
  ratio=exp(-beta*abs(y))/exp(-beta*abs(x))
  v=runif(1,0,1)
  if (v<ratio)
  { x=y}
  print(x)
}
```