

Nom :

Prénom :

Contrôle no 3, sujet A (durée 2h)

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. Le sujet est à rendre avec la copie.

Exercice 1. On s'intéresse au programme dans le cadre Programme 1.

Programme 1 Simulation de variable aléatoire

```
simu<-function(z)
{
  lambda=2
  s=0
  b=0
  n=-1
  while (b==0)
  {
    n=n+1
    u=runif(1,0,1)
    t=-log(u)/lambda
    s=s+t
    if (s>1)
      { b=1 }
  }
  return(n)
}
```

- (1) Quelle est la loi des variables t simulées dans la boucle ?
- (2) Quelle est la loi de la variable simulée quand on appelle `simu(0)` ?
- (3) Quel est le nombre moyen de boucles effectuées quand on fait appel à la fonction `simu` ?

Exercice 2. Soient, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\exp(-\sqrt{x})(\sin(x))^2}{Z} \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x) \text{ avec } Z = \int_0^{+\infty} f(x)dx,$$

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{1 + \frac{x^2}{4}} \times \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x).$$

- (1) Soit U de loi $\mathcal{U}([0; 1])$. Montrer que

$$2 \tan(\pi U/2)$$

est de loi de densité g .

- (2) Trouver une constante C telle que $f(x) \leq Cg(x)$ pour tout x .

- (3) Écrire un programme en R qui simule une variable de loi de densité f (répondre dans le cadre ci-dessous).

Exercice 3. Soit $E = \mathbb{Z}$. Nous définissons le noyau de Markov suivant sur E :

$$\forall x \in E, Q(x, x+1) = Q(x, x-1) = 1/2.$$

Soit $\beta > 0$. Soit

$$\psi : x \in E \mapsto \psi(x) = \exp(-\beta|x|).$$

Soit

$$Z = \sum_{x \in \mathbb{Z}} \psi(x).$$

- (1) Montrer que Z est finie.
- (2) Soit π la mesure de probabilité sur E définie par :

$$\forall x \in E, \pi(x) = \frac{\psi(x)}{Z}.$$

Écrire un programme en R qui simule une chaîne de Metropolis de noyau de proposition Q et de loi cible π (répondre sur la copie).