M1 IM - Simulation stochastique (Monte-Carlo) - 2016-2017
`http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`
Nom :
Prénom :

Corrigé du contrôle no 3, sujet B (durée 2h)

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1.

(1) À chaque fois, `x` vaut 1 avec probabilité $p = 0,2$ et vaut 0 avec probabilité $1 - p$. C'est donc une loi $\mathcal{B}(p)$ (Bernoulli de paramètre p).

(2) Soit φ une fonction continue bornée. Soit N la variable renvoyée par le programme. Soient X_1, X_2, ... les variables de Bernoulli successivement simulées (elles sont indépendantes). Nous calculons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\varphi(N)) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \varphi(i)\mathbb{P}(N = i) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \varphi(i)\mathbb{P}(X_1 = 0, \dots, X_{i-1} = 0, X_i = 1) \\
\text{(indépendance des } X_i\text{)} &= \sum_{i=1}^{+\infty} \varphi(i)(1-p)^{i-1}p\,.
\end{aligned}$$

Donc N est de loi $\mathcal{G}(p)$ (géométrique de paramètre p).

(3) Le nombre moyen de boucle est

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N) &= \sum_{i=1}^{+\infty} i(1-p)^{i-1}p \\
&= p\left(\frac{d}{dz}\sum_{i=1}^{+\infty} z^i\right)\Bigg|_{z=1-p} \\
&= p\left(\frac{d}{dz}\sum_{i=0}^{+\infty} z^i\right)\Bigg|_{z=1-p} \\
&= p\left(\frac{d}{dz}\frac{1}{(1-z)}\right)\Bigg|_{z=1-p} \\
&= p\left(\frac{1}{(1-z)^2}\right)\Bigg|_{z=1-p} \\
&= p \times \frac{1}{(1-(1-p))^2} \\
&= \frac{1}{p}\,.
\end{aligned}$$

Exercice 2.

(1) Nous remarquons que

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\sqrt{|x|}} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-\sqrt{|x|}} \frac{e^{-x^2/2}}{e^{-(x-m)^2/2}} \frac{e^{-(x-m)^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx\,.
\end{aligned}$$

Si nous tirons des variables Y_1, Y_2, … indépendantes et identiquement distribuées, de loi $\mathcal{N}(m;1)$, alors

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{-\sqrt{|Y_i|}}\frac{e^{-Y_i^2/2}}{e^{-(Y_i-m)^2/2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} I$$

(par la loi des grands nombres).

(2) Voir le programme 1.

Programme 1 Fonction d'importance

```
m=1
n=1000
s=0
for (i in 1:n)
{
  y=rnorm(1,m,1)
  s=s+exp(-sqrt(abs(y))-y^2/2+(y-m)^2/2)
}
print(s/n)
```

Exercice 3.

(1) Voir le programme 2.

Programme 2 Calcul de la longueur de l'orbite de 1

```
cycle<-function(v)
{
  n=0
  b=0
  x=1
  while (b==0)
  {
    x=v[x]
    if (x==1)
    { b=1 }
    n=n+1
  }
  return (n)
}
```

(2) Nous remarquons que la constante $\sum_{v\in\mathfrak{S}_n} c(v)$ n'apparaît pas dans le ratio de Metropolis. Voir le programme 3.

Programme 3 Metropolis

```
P=50
for (i in 1:P)
{
  print(u)
  print(cycle(u))
  i=floor(runif(1,0,n))+1 #entier aléatoire entre 1 et n
  j=i+1
  if (j==n+1)
  { j=1 }
  v=u
  inter=v[j]
  v[j]=u[i]
  v[i]=inter
  ratio=cycle(v)/cycle(u)
  w=runif(1,0,1)
  if (w<ratio)
  { u=v }
}
```