M1 IM - Simulation stochastique (Monte-Carlo) - 2016-2017
`http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Nom :

Prénom :

# Contrôle no 3, sujet B (durée 2h)

*Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. Le sujet est à rendre avec la copie.*

**Exercice 1.** On s'intéresse au programme dans le cadre Programme 1.

**Programme 1** Simulation de variable aléatoire

```
p=0.2
simu<-function(z)
{
  n=0
  b=0
  while (b==0)
  {
    n=n+1
    u=runif(1,0,1)
    if (u<p)
    { x=1 }
    else
    { x=0 }
    if (x==1)
    { b=1 }
  }
  return(n)
}
```

(1) Quelle est la loi des variables `x` simulées dans la boucle ?

(2) Quelle est la loi de la variable simulée quand on appelle `simu(0)` ?

(3) Quel est le nombre moyen de boucles effectuées quand on fait appel à la fonction `simu` ?

**Exercice 2.** Soit $X$ de loi $\mathcal{N}(0;1)$. Soit $I = \mathbb{E}(\exp(\sqrt{|X|}))$. Une première méthode de Monte-Carlo pour calculer $I$ consiste à l'approcher par des sommes

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\exp(\sqrt{|X_i|})$$

avec des $X_i$ indépendants et identiquement distribués, de même loi que $X$.

(1) Proposer une méthode de réduction de variance par fonction d'importance. Suggestion : utiliser la loi $\mathcal{N}(m;1)$ pour un $m > 0$.

(2) Écrire un programme en `R` qui calcule une valeur approchée de $I$ en utilisant la méthode ci-dessus. Répondre dans le cadre ci-dessous.

**Exercice 3.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des vecteurs $u$ de $\mathbb{R}^n$ tel que les composantes de $u$ sont dans $\{1, 2, \ldots, n\}$ et chaque entier de $\{1, 2, \ldots, n\}$ apparaît une fois dans les composantes de $u$. Nous remarquons que $\mathfrak{S}_n$ est en bijection avec les permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Pour $u \in \mathfrak{S}_n$, nous notons $u(i)$ la $i$-ème composante de $u$. Pour $u \in \mathfrak{S}_n$, nous notons

$$c(u) = \inf\{n \geq 1 \,:\, u^{\circ n}(1) = 1\}$$

(où $u^{\circ n} = u \circ u \circ \cdots \circ u$ ($u$ composé $n$ fois)). Soit $\pi$ la mesure sur $\mathfrak{S}_n$ définie par

$$\forall u \in \mathfrak{S}_n\,,\; \pi(u) = \frac{c(u)}{\sum_{v \in \mathfrak{S}_n} c(v)}\,.$$

(1) Écrire une fonction en `R` qui calcule $c(u)$ pour un $u \in \mathfrak{S}_n$ donné (répondre sur la copie).

(2) Pour $u$ et $v$ dans $\mathfrak{S}_n$, nous notons $u \leftrightarrow v$ si $\exists i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tel que $u(i) = v(i+1)$, $v(i) = u(i+1)$ et pour $j \in \{1, 2, \ldots, n\} \backslash \{i, i+1\}$, $u(j) = v(j)$, ou si $u(1) = v(n)$, $v(1) = u(n)$ et pour $j \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$, $u(j) = v(j)$. Nous définissons le noyau $Q$ sur $\mathfrak{S}_n$ par

$$Q(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } u \leftrightarrow v\,, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Écrire en `R` un programme qui simule une chaîne de Metropolis de noyau de proposition $Q$ et de loi cible $\pi$ (répondre sur la copie).