M1 IM - Séries temporelles - 2017-2018
`http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Corrigé du contrôle no 3, sujet A (durée 2h)

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. Voir le poly de cours (proposition 3.6).

Exercice 2. Notons $x = 1,03$ et $\alpha = 0,04$. Nous voulons

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - m\right| \geq x\right) \leq \alpha\,,$$

ce qui équivaut à

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right| \geq \frac{x\sqrt{n}}{\sigma}\right) \leq \alpha\,.$$

Le théorème central-limite (que nous pouvons bien appliquer puisque les variables sont L^2) nous dit que c'est la même chose (presque) que

$$\mathbb{P}\left(|Z| \geq \frac{x\sqrt{n}}{\sigma}\right) \leq \alpha$$

avec $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$. En utilisant les symétries de la gaussienne, nous voyons que ce que nous cherchons est équivalent à

$$\mathbb{P}\left(Z \leq \frac{x\sqrt{n}}{\sigma}\right) \geq 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,98\,.$$

Nous lisons donc dans la table de la loi normale qu'il faut prendre

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{x\sqrt{n}}{\sigma} & \geq & 2,06 \\ \sqrt{n} & \geq & 2 \times 2 \\ n & \geq & 16\,. \end{array}$$

Exercice 3. Voir le programme 1.

Algorithme 1 Programme pour l'exercice 3.

```
p=1;q=0
out<-arima(x,order=c(p,0,q)); min=out$aic
for (p in 0:3)
{
  for (q in 0:3)
  {
    if (p+q>0)
    {
      out<-arima(x,order=c(p,0,q))
      if (out$aic<min)
      { min=out$aic; p0=p; q0=q }
    }
  }
}
cat("meilleur couple trouvé : ",p0,q0)
```

Exercice 4. On observe que les auto-corrélations tendent vers 0 à l'infini et que les auto-corrélations partielles s'annulent à partir du rang 3. Donc le processus est un $MA(2)$.

Exercice 5. Nous calculons

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 2}\frac{X_k}{2^k} &= \sum_{k\geq 2}\frac{1}{2^k}(Z_k - Z_{k-1} + 2Z_{k-2})\\ &= \frac{1}{2}Z_0 + Z_1(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}) + \sum_{j\geq 2} Z_j\left(\frac{1}{2^j} - \frac{1}{2^{j+1}} + \frac{2}{2^{j+2}}\right)\\ &= \frac{1}{2}Z_0 + Z_1(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}) + \sum_{j\geq 2} Z_j\left(\frac{1}{2^j}\right).\end{aligned}$$

Donc (nous utilisons les propriétés des (Z_k))

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left(\sum_{k\geq 2}\frac{X_k}{2^k}\right)^2\right) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \sum_{j\geq 2}\frac{1}{2^{2j}}\\ \text{(série géométrique)} &< \infty\,.\end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{k\geq 2}\frac{X_k}{2^k}$$

est finie p.s.