M1 IM - Séries temporelles - 2017-2018
`http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Corrigé du contrôle no 3, sujet B (durée 2h)

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. Voir le poly de cours (proposition 4.9).

Exercice 2. Nous voulons

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}-m\right|\geq x\right)\leq\alpha\,,$$

ce qui équivaut à

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n-nm}{\sigma\sqrt{n}}\right|\geq\frac{x\sqrt{n}}{\sigma}\right)\leq\alpha\,.$$

Le théorème central-limite (que nous pouvons bien appliquer puisque les variables sont L^2) nous dit que c'est la même chose (presque) que

$$\mathbb{P}\left(|Z|\geq\frac{x\sqrt{n}}{\sigma}\right)\leq\alpha$$

avec $Z\sim\mathcal{N}(0;1)$. En utilisant les symétries de la gaussienne, nous voyons que ce que nous cherchons est équivalent à

$$\mathbb{P}\left(Z\leq\frac{x\sqrt{n}}{\sigma}\right)\geq 1-\frac{\alpha}{2}\,.$$

Nous avons

$$\frac{x\sqrt{n}}{\sigma}=x\times 5=2,075\,.$$

Nous voulons donc (d'après la table)

$$1-\frac{\alpha}{2}\geq 0,9812\,,$$

c'est à dire

$$\alpha\leq 2-2\times 0,9812=2\times 0,0188=0,0376\,.$$

Exercice 3. Nous calculons

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 2}\frac{X_k}{3^k} &= \sum_{k\geq 2}\frac{\epsilon_k-2\epsilon_{k-1}+3\epsilon_{k-2}}{3^k}\\ &= \frac{\epsilon_0}{3}+\epsilon_1(\frac{1}{9}-\frac{2}{3})+\sum_{k\geq 2}\epsilon_k\left(\frac{1}{3^k}-\frac{2}{3^{k+1}}+\frac{3}{3^{k+2}}\right)\\ &= \frac{\epsilon_0}{3}+\epsilon_1(\frac{1}{9}-\frac{2}{3})+\sum_{k\geq 2}\frac{\epsilon_k}{3^k}\frac{2}{3}\,.\end{aligned}$$

Donc (nous utilisons les propriétés des (ϵ_k))

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left(\sum_{k\geq 2}\frac{X_k}{3^k}\right)^2\right) &= \frac{1}{9}+\frac{25}{81}+\sum_{k\geq 2}\frac{1}{3^{2k}}\times\frac{4}{9}\\ \text{(série géométrique)} &< \infty\,.\end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{k\geq 2}\frac{X_k}{3^k}$$

est finie p.s.

Exercice 4. Le polynôme associé à cette équation est

$$A(X) = 1 - a_1 X - a_2 X^2 - a_3 X^3 \,.$$

Pour qu'il y ait un processus stationnaire vérifiant l'équation, il suffit (d'après le cours) de trouver des coefficients a_1, a_2, a_3 tels que les racines de A soient toutes de module strictement plus grand que 1. Nous prenons A sous la forme

$$A(X) = (1 - \frac{X}{2})(1 - \frac{X}{3})(1 + \frac{X}{2}) \,.$$

Ses racines sont $\{2; 3; -2\}$ et sont bien de module > 1. Nous avons alors

$$\begin{aligned} A(X) &= \frac{X^3}{12} + X^2(\frac{1}{6} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6}) + X(-\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}) + 1 \\ &= \frac{X^3}{12} - \frac{X^2}{4} - \frac{X}{3} + 1 \,. \end{aligned}$$

Donc $a_1 = 1/3$, $a_2 = 1/4$, $a_3 = -1/12$ conviennent.

Exercice 5. Le processus (X_t) est stationnaire donc $\mathbb{E}(X_t) = m$ ne dépend pas de t et, pour tout $h \geq 0$,

$$\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \sigma(h)$$

ne dépend pas de h. Calculons pour tout t et tout $h \geq 0$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_t) &= \mathbb{E}(X_t - X_{t-1}) \\ &= 0 \,, \end{aligned}$$

(donc $\mathbb{E}(Y_t)$ ne dépend pas de t) et

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t+h}) &= \mathbb{E}(Y_t Y_{t+h}) - \mathbb{E}(Y_t)\mathbb{E}(Y_{t+h}) \\ &= \mathbb{E}((X_t - X_{t-1})(X_{t+h} - X_{t+h-1})) - 0 \\ &= \mathbb{E}(X_t X_{t+h}) + \mathbb{E}(X_{t-1} X_{t+h-1}) - \mathbb{E}(X_{t-1} X_{t+h})\mathbb{E}(X_t X_{t+h-1}) \\ &= m^2 + \sigma(h) + m^2 + \sigma(h) - m^2 - \sigma(h+1) - m^2 - \sigma(h-1) \\ &= 2\sigma(h) - \sigma(h+1) - \sigma(h-1) \end{aligned}$$

(donc $\mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t+h})$ ne dépend pas de t). Donc (Y_t) est stationnaire.