Nom :

Prénom :

M1 IM - Séries temporelles - 2017-2018
`http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Contrôle no 3, sujet B (durée 2h)

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. Le sujet est à rendre avec la copie.

Exercice 1. (Question de cours) Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus $MA(3)$ (donc supposé stationnaire) vérifiant l'équation

$$X_t = \epsilon_t + \epsilon_{t-1} - \epsilon_{t-2} + 2\epsilon_{t-3}\,,$$

avec des (ϵ_t) formant un bruit blanc centré de variance σ^2. Soit σ la fonction d'auto-covariance associée à (X_t). Montrer que $\sigma(h) = 0$ si $h \geq 4$. (On demande de refaire une démonstration du cours.)

Exercice 2. Soient $X_1, X_2, \dots$ des variables indépendantes et identiquement distribuées telle que $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$. Soit m l'espérance de ces variables et soit σ^2 la variance de ces variables ($\sigma = 2$). Soit $x = 0,415$. Soit $n = 100$. Comment doit-on choisir α pour avoir

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - m\right| \geq x\right) \leq \alpha\,?$$

Exercice 3. On se donne des variables $(\epsilon_k)_{k\geq 0}$ qui sont indépendantes et identiquement distribuées, d'espérance nulle et de variance 1. Pour $k \geq 2$, on définit

$$X_k = \epsilon_k - 2\epsilon_{k-1} + 3\epsilon_{k-2}\,.$$

Monter que la variable

$$\sum_{k\geq 2} \frac{X_k}{3^k}$$

est bien définie (presque sûrement).

Exercice 4. Trouver des coefficients a_1, a_2, a_3 tels qu'il existe un processus stationnaire $(X_t)_{t\geq 0}$ vérifiant l'équation

$$X_t = \epsilon_t + a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + a_3 X_{t-3}\ ?$$

Exercice 5. Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus stationnaire. Soit $Y_t = X_t - X_{t-1}$ (pour $t \geq 1$). Montrer que $(Y_t)_{t\geq 1}$ est un processus stationnaire. Répondre dans le cadre ci-dessous.