

Nom :

Prénom :

Contrôle no 1, sujet B (durée 1h30)

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. Le sujet est à rendre avec la copie. Si vous bénéficiez d'un tiers-temps, ne traitez que le premier exercice. Barème :

2.1->4, 2.1->4, 1.1->5, 1.2->5, 1.3->5.

Exercice 1. On s'intéresse au programme dans le cadre Algorithme 1.

- (1) Quelles sont les lois des variables renvoyées par les fonctions `simuf` et `simug`?
- (2) Soit X une variable de même loi que ce que renvoie la fonction `simuf`. Soit Y une variable de même loi que ce que renvoie la fonction `simug`. Soient U, V des variables de loi $\mathcal{U}([0; 1])$. On suppose que X, Y, U, V sont indépendantes. Soient

$$f(x) = \frac{e^{-|x+1|}}{2},$$
$$g(x) = \frac{e^{-|x-1|}}{2}.$$

Calculer $\mathbb{P}(Uf(X) > g(X))$ et $\mathbb{P}(Vg(Y) > f(Y))$.

- (3) Calculer le nombre moyen de boucles effectuées par la boucle `while`. On pourra exprimer le résultat en fonction des probabilités calculées à la question précédente.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition :

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ \frac{t}{4} & \text{si } t \in [0; 1/3[, \\ \frac{t}{3} + \frac{2}{3} & \text{si } t \in [1/3; 1], \\ 1 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

- (1) Calculer le pseudo-inverse de F .
- (2) Écrire dans le cadre ci-dessous un programme en `R` qui simule une variable aléatoire de fonction de répartition F (justifier sur la copie).

Algorithme 1 Simulation de variable aléatoire

```
mu1=-1; mu2=1
f<-function(t)
{
  return(exp(-abs(x-mu1)))
}
g<-function(t)
{
  return(exp(-abs(x-mu2)))
}
simuf<-function(1)
{
  u=runif(1,0,1);v=runif(1,0,1)
  if (u<0.5)
  {return (mu1-log(v))}
  else
  {return (mu1+log(v))}
}
simug<-function(1)
{
  u=runif(1,0,1);v=runif(1,0,1)
  if (u<0.5)
  {return (mu2-log(v))}
  else
  {return (mu2+log(v))}
}
simu<-function(t)
{
  b=0
  while(b==0)
  {
    x=simuf(1)
    y=simug(1)
    u=runif(1,0,1); v=runif(1,0,1)
    if (u*f(x)<g(x))
    { b=1; result=y}
    else
    {
      if (v*g(y)<f(y))
      { b=1; result=x }
    }
  }
  return(result)
}
```
