M1 IM - Simulation stochastique (Monte-Carlo) - 2017-2018
`http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Nom :

Prénom :

Contrôle no 2, sujet A (durée 1h)

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Le sujet est à rendre avec la copie. Si vous bénéficiez d'un tiers-temps, ne traitez que les deux premières questions.

Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que

$$\int_0^{+\infty} |g(x)| \frac{2}{(1+x)^3} dx < \infty$$

et

$$\int_0^{+\infty} g(x)^2 \frac{2}{(1+x)^3} dx < \infty$$

Soit f la densité de probabilité suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ f(x) = \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x) \frac{2}{(1+x)^3}\,.$$

(1) Proposer une méthode de Monte-Carlo pour calculer

$$I = \int_0^{+\infty} g(x) \frac{2}{(1+x)^3} dx\,.$$

(2) Montrer que, pour toute fonction h telle que

$$\int_0^{+\infty} |h(x)| \frac{2}{(1+x)^3} dx < \infty\,,$$

nous avons

$$\int_0^{+\infty} h(x) \frac{2}{(1+x)^3} dx = \int_0^{+\infty} h\left(\left(1 - \frac{1}{(x+1)^2}\right)^{-1/2} - 1\right) \frac{2}{(1+x)^3} dx\,.$$

(3) Soit X une variable aléatoire de loi de densité f. Montrer que

$$\mathrm{Var}\left(\frac{g(X) + g\left(\left(1 - \frac{1}{(X+1)^2}\right)^{-1/2} - 1\right)}{2}\right) \leq \mathrm{Var}(g(X))$$

(démonstration très semblable à une démonstration du cours).

(4) En déduire une méthode de Monte-Carlo dont la variance est plus petite que celle de la méthode de la question 1.

(5) On suppose que l'on dispose d'une fonction `simu` qui permet de simuler une variable de densité f. Écrire un programme en `R` qui calcule I par Monte-Carlo en utilisant cette réduction de variance, dans le cas $g(x) = \sqrt{x}$ (dans le petit cadre ci-dessous).