M1 IM - Simulation stochastique (Monte-Carlo) - 2017-2018
`http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Nom :

Prénom :

Contrôle no 3, sujet A (durée 2h)

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. Le sujet est à rendre avec la copie.

Exercice 1. On s'intéresse au programme dans le cadre Programme 1.

Programme 1 Simulation de variable aléatoire

```
p=0.2
simu<-function(z)
{
  n=0
  b=0
  s=0
  while (b==0)
  {
    u=runif(1,0,1)
    if (u<p)
    { x=1 }
    else
    { x=0 }
    n=n+x
    s=s+1
    if (s>9)
    { b=1 }
  }
  return(n)
}
```

(1) Quelle est la loi des variables `x` simulées dans la boucle ?

(2) Quelle est la loi de la variable simulée quand on appelle `simu(0)` ?

(3) Quel est le nombre moyen de boucles effectuées quand on fait appel à la fonction `simu` ?

Exercice 2. Soit X de loi $\mathcal{N}(0;1)$. Soit $I = \mathbb{E}(\exp(1/X)\mathbb{1}_{|x|>1})$. Une première méthode de Monte-Carlo pour calculer I consiste à l'approcher par des sommes

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \exp(1/X_i)\mathbb{1}_{|X|>1} \,,$$

avec des X_i indépendants et identiquement distribués, de même loi que X.

(1) Proposer une méthode de réduction de variance par variables antithétiques.

(2) Écrire un programme en `R` qui calcule une valeur approchée de I en utilisant la méthode ci-dessus. Répondre dans le cadre ci-dessous.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des vecteurs u de $\mathbb{R}^n$ tel que les composantes de u sont dans $\{1, 2, \dots, n\}$ et chaque entier de $\{1, 2, \dots, n\}$ apparaît une fois dans les composantes de u. Nous remarquons que $\mathfrak{S}_n$ est en bijection avec les permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$. Pour $u \in \mathfrak{S}_n$, nous notons $u(i)$ la i-ème composante de u. Pour $u \in \mathfrak{S}_n$, nous notons

$$c(u) = \sup_{k \in \{1,2,\dots,n\}} \inf\{n \geq 1 \,:\, u^{\circ n}(k) = k\}$$

(où $u^{\circ n} = u \circ u \circ \cdots \circ u$ (u composé n fois)). Soit π la mesure sur $\mathfrak{S}_n$ définie par

$$\forall u \in \mathfrak{S}_n \,,\, \pi(u) = \frac{c(u)}{\sum_{v \in \mathfrak{S}_n} c(v)} \,.$$

(1) Écrire une fonction en `R` qui calcule $c(u)$ pour un $u \in \mathfrak{S}_n$ donné (répondre sur la copie).

(2) Pour u et v dans $\mathfrak{S}_n$, nous notons $u \leftrightarrow v$ si $\exists i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ tels que $i \neq j$ avec $u(i) = v(j)$, $v(i) = u(j)$, et pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\} \backslash \{i, j\}$, $u(k) = v(k)$. Nous définissons le noyau Q sur $\mathfrak{S}_n$ par

$$Q(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{1+C_n^2} & \text{si } u \leftrightarrow v \,, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Écrire en `R` un programme qui simule une chaîne de Metropolis de noyau de proposition Q et de loi cible π (répondre sur la copie).