FEUILLE DE TD NUMÉRO 1

PROBABILITÉS FINIES

Tous les exercices de cette feuille sont à faire, et seront considérés comme traités, même s'ils ne le sont pas durant les séances de TD. Vous pouvez (et êtes encouragés à) poser des questions aux chargés de TD ou au chargé de cours (mais pas la semaine précédent les partiels/examens et en évitant l'usage intempestif du mail).

1. Dénombrement

Dans chacun des exercices qui suivent, on essaiera d'expliquer la démarche de dénombrement de façon aussi rigoureuse que possible.

Exercice 1. Rappeler la signification ensembliste des coefficients binomiaux C_n^k pour n, k entiers positifs quelconques. Donner leurs expressions en termes de factoriels.

Exercice 2. Etant donnés deux entiers n et k positifs, montrer la relation du triangle de Pascal (on donnera une preuve algébrique et une preuve ensembliste) :

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}.$$

Pour $k \leq n$, montrer la relation d'absorption

$$kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}.$$

En déduire la valeur de

$$\sum_{k=0}^{n} kC_n^k.$$

Exercice 3. Combien y a-t-il de parties dans un ensembles à n éléments ? Le démontrer.

Exercice 4. Rappeler et démontrer la formule du binôme de Newton.

Exercice 5. Etant donnés deux entiers positifs n et k, $0 \leq k \leq n$, vérifier que $C_n^k = C_n^{n-k}$. En déduire, par un raisonnement de pur dénombrement, que

$$\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n.$$

Exercice 6. Les nouvelles plaques minéralogiques comptent exactement 4 lettres et 3 chiffres selon le modèle AA-111-AA. Donner le nombre de plaques possibles. Comparer ce résultat au système des anciennes plaques, comptant 2 lettres et 6 chiffres selon le modèle 1111-AA-11.

Exercice 7. Combien de successions de lettres peut-on former à partir du mot "REVER" ? et avec le mot "ENCORE" ?

Exercice 8. L'équipe de football d'un grand club européen compte (par ordre alphabétique) 1 Brésilien, 2 Espagnols, 2 Français, 4 Italiens et 2 Ivoiriens. En supposant que la feuille de match, numérotée de 1 à 11, ne mentionne que les nationalités des joueurs, donner le nombre de feuilles de match possibles.

Exercice 9. De combien de façon peut-on ranger p boules (indiscernables) dans n cases numérotées ? (Avec $p \leq n$.) Même question si les boules sont discernables (par la couleur par exemple).

2. Calcul de probabilités

Dans les exercices d'application de la fin de cette section, on prendra un très grand soin à modéliser l'expérience considérée à l'aide d'un espace de probabilité Ω, dont on précisera la mesure de probabilité $\mathbb{P}$. Les événements considérés seront aussi décrits comme des sous-ensembles de Ω.

Exercice 10. Donner la définition d'une probabilité sur un espace fini. Qu'appelle-t-on "poids" d'une probabilité ? Pourquoii dit-on qu'ils caractérisent la probabilité ? Le démontrer.

Exercice 11. Etant donné un espace de probabilité fini $(\Omega, \mathbb{P})$, montrer que $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ si A et B sont deux événements tels que $A \subset B$.

Exercice 12. Etant donné un espace de probabilité fini $(\Omega, \mathbb{P})$, montrer pour toute famille $A_1, \ldots, A_n$ de n événements que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

Exercice 13. Démontrer la formule de Poincaré : étant donnés n événements $A_1, \ldots, A_n$ d'un espace de probabilité fini $(\Omega, \mathbb{P})$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{\ell+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_\ell \leq n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{\ell} A_{i_j}\right).$$

Application : Un facteur distrait distribue le courrier au hasard dans une rue comptant n numéros. En supposant qu'il dépose exactement une lettre par habitation et que, sur les n distribuées au total, une et une seule soit destinée à une habitation donnée, quelle est la probabilité que personne ne reçoive de lettre lui ayant été explicitement adressée ?

Exercice 14. Dans cet exercice, on pourra utiliser la formule de Poincarré. On dispose de $n \geq 1$ urnes numérotées de 1 à n et de $r \geq 1$ boules que l'on doit disposer dans les urnes (selon certaines règles). On suppose cependant toutes les répartitions équiprobables (i.e. on munit toujours l'univers des possibles Ω de la probabilité uniforme).

1. *Maxwell-Boltzmann :* Les boules sont discernables et on place les r boules dans les n urnes. L'univers des possibles est $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}^r$ que l'on munit de la probabilité uniforme.
   a. Soit $i = 1, \ldots, n$ quelconque et soit E_i l'événement "la i ème urne est vide". Ecrire ensemblistement cet événement comme une partie de Ω et calculer $\mathbb{P}(E_i)$.
   b. Soit $1 \leq m \leq n$. Soit A l'événement " aucune des urnes de 1 à m n'est vide". Exprimer A ensemblistement à l'aide de $E_1, \ldots, E_m$ et, en utilisant la formule de Poincaré rappelée au début, montrer que
   $$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k \left(1 - \frac{k}{n}\right)^r.$$
   c. Soit A_k l'événement "l' urne 1 contient exactement k boules" (avec $0 \leq k \leq r$). Ecrire ensemblistement l 'événement A_k et calculer sa probabilité.
   d. Soit B l'événement "chaque urne contient au plus une boule". Ecrire ensemblistement cet événement comme une partie de Ω et calculer $\mathbb{P}(B)$. La formule obtenue a-t-elle un sens si $r \geq n + 1$?
2. *Bose-Einstein :* Les boules sont indiscernables. L'univers des possibles est $\Omega = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n\ ;\ x_1 + \ldots + x_n = r\}$.
   a. Que représente concrètement x_i ?

b. Quel est le cardinal de Ω ?
c. Soit B_k l'événement "l'urne 1 contient exactement k boules." Exprimer $\mathbb{P}(B_k)$.

3. *Fermi-Dirac :* Les boules sont indiscernables mais il y a impossibilité d'avoir deux ou plus de deux boules dans une urne. L'univers des possibles Ω est l'ensemble des parties à r éléments parmi n. On suppose $r \leq n$.
a. Quel est le cardinal de Ω?
b. Décrire ensemblistement l'événement C_1 "l'urne 1 contient exactement 1 boule" et calculer sa probabilité.

Exercice 15. Quelle est la probabilité qu'en jetant six dés équilibrés et discernables (par exemple par la couleur), toutes les faces exhibent un chiffre différent ?

Exercice 16. Quelle est la probabilité que dans une famille de n enfants, $n \geq 2$, la famille soit constituée d'enfants des deux sexes (événement A) ? Quelle est la probabilité que dans une famille de n enfants, $n \geq 2$, la famille soit constituée de garçons et d'au plus une fille (événement B). Calculer la probabilité de $A \cap B$.

Exercice 17. Des tickets au nombre de M sont édités et numérotés de 1 à M. Pour simplifier, on suppose que les n premiers (avec $2n \leq M$) sont gagnants. (Naturellement, les acheteurs ne le savent pas.) Quelle est la probabilité qu'un acheteur de n billets achète au moins un billet gagnant ?

3. Loi d'une variable aléatoire

Ici $(\Omega, \mathbb{P})$ désigne un espace de probabilité fini.

Exercice 18. Qu'appelle-t-on loi d'une variable aléatoire X sur un espace de probabilité fini ? On la notera $\mathbb{P}_X$.

Exercice 19. Etant donnés un espace de probabilité fini $(\Omega, \mathbb{P})$ et un événement A, donner la loi de la variable aléatoire "fonction indicatrice de A" définie par:

$$\mathbf{1}_A : \omega \in \Omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A, \\ 0 & \text{si } \omega \notin A. \end{cases}$$

Exercice 20. Etant donnée une variable aléatoire X de loi uniforme sur $\{1, ..., N\}$ (définie sur un espace de probabilité fini $(\Omega, \mathbb{P})$), donner les lois de $N + 1 - X$ et de X/N. On suppose $N = 2n$. On construit alors la variable aléatoire

$$\forall \omega \in \Omega, \ Y(\omega) = \lfloor \frac{X(\omega)}{2} \rfloor,$$

où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière. Donner la loi de Y.

Exercice 21. On lance deux dés à 6 faces. Donner la loi de la somme des deux résultats obtenus.

Exercice 22. On rappelle qu'une variable aléatoire H est dite de loi hypergéométrique de paramètres N, n et r si

$$\mathbb{P}\{H = k\} = \frac{C_n^k C_{N-n}^{r-k}}{C_N^r}, \quad \max(n - N + r, 0) \leq k \leq \min(n, r).$$

Que dire de la limite de $\mathbb{P}\{H = k\}$ lorsque N tend vers l'infini et n/N tend vers $p \in]0, 1[$? (Le paramètre r étant fixé.)

Exercice 23. Soit X une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres $(2n, 1/2)$, avec $n \geq 1$.

1. Montrer que $\mathbb{P}\{X \leq n\} = \mathbb{P}\{X \geq n\}$. En déduire que $\mathbb{P}\{X \leq n\} = \dfrac{1 + 2^{-2n} C_{2n}^n}{2}$.

2. Donner la limite de $\mathbb{P}\{X \leq n\}$ lorsque n tend vers l'infini (on pourra utiliser la formule de Stirling sans la démontrer).

Exercice 24. Soit X une variable aléatoire de loi biomiale de paramètres $(2n, 1/2)$, avec n entier naturel pair.

1. Montrer que pour tout $0 \leq k \leq n-1$, $C_{2n}^k \leq C_{2n}^{k+1}$.
2. En déduire que

$$\mathbb{P}\{X \in 2\mathbb{N}, X < n\} \leq \mathbb{P}\{X \in 2\mathbb{N}+1, X < n\} \leq \mathbb{P}\{X \in 2\mathbb{N}, X < n\} + \mathbb{P}\{X = n\} - \mathbb{P}\{X = 0\}.$$

3. Montrer que

$$\mathbb{P}\{X \in 2\mathbb{N}\} - \mathbb{P}\{X = n\} \leq \mathbb{P}\{X \in 2\mathbb{N}+1\} \leq \mathbb{P}\{X \in 2\mathbb{N}\} + \mathbb{P}\{X = n\} - 2\mathbb{P}\{X = 0\}.$$

4. Donner la limite de $\mathbb{P}\{X \in 2\mathbb{N}\}$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 25. On considère la fonction

$$F : t \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \text{ ;} \\ 1/4 \text{ si } 0 \leq t < 1 \text{ ;} \\ 3/4 \text{ si } 1 \leq t < 2 \text{ ;} \\ 1 \text{ si } t \geq 2. \end{cases}$$

On considère également une variable aléatoire X (définie sur $(\Omega, \mathbb{P})$) à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$, de loi donnée par la famille de poids (p_0, p_1, p_2). Montrer que l'on peut choisir (p_0, p_1, p_2) de sorte que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}\{X \leq t\} = F(t)$.

4. Espérance et variance

Ici $(\Omega, \mathbb{P})$ désigne un espace de probabilité fini.

Exercice 26. Soit X une variable aléatoire sur un espace de probabilité fini $(\Omega, \mathbb{P})$.

1. Donner la définition de l'espérance de X. On la notera $\mathbb{E}(X)$.
2. Donner la définition de la variance de X. On la notera $\mathbb{V}(X)$.
3. Qu'est-ce que la formule de transfert pour X ? La démontrer.

Exercice 27. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\{1, \ldots, 5\}$ de loi

$$\mathbb{P}\{X = 1\} = 1/4,\ \mathbb{P}\{X = 2\} = 1/6,\ \mathbb{P}\{X = 3\} = 1/12,\ \mathbb{P}\{X = 4\} = 1/3,\ \mathbb{P}\{X = 5\} = 1/6.$$

Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(\varphi(X))$ pour $\varphi(x) = \cos(\pi x/2)$ puis $\varphi(x) = \sin(\pi x/2)$.

Exercice 28. Calculer l'espérance et la variance d'une loi uniforme sur $\{1, \ldots, N\}$, $N \geq 1$. On rappelle que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 29. Calculer l'espérance et la variance d'une loi binomiale de paramètre (n, p), $n \geq 1$, $p \in [0, 1]$.

Exercice 30. En utilisant la relation d'absorption $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$, $1 \leq k \leq n$, calculer l'espérance d'une loi hypergéométrique (N, n, p) avec $0 \leq n \leq N$ et $1 \leq p \leq N$ (cf. exercice 22). La comparer à l'espérance d'une binomiale.

Exercice 31. Calculer de deux façons l'espérance de la somme des lancers de deux dés à 6 faces :

1. en utilisant la loi de la somme des deux lancers (utiliser le résultat de l'exercie 21),
2. en utilisant la linéarité de l'espérance.

Exercice 32. Soit $X_1, \ldots, X_{100}$ des variables aléatoires telles que X_i soit de loi $\mathcal{B}(i, 1/i^2)$. Calculer

$$\mathbb{E}(1 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + \ldots + 100 \cdot X_{100}).$$

Quelle est la propriété de l'espérance que vous avez utilisée ?

Exercice 33. Soit X une v.a. de loi uniforme sur $\{1, \ldots, N\}$, $N \geq 1$. Calculer $\mathbb{E}[\sin(2\pi\theta X/N)]$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ (on utilisera la formule de transfert et la définition du sinus par l'exponentielle complexe).

Exercice 34. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur le doublon $\{-N, N\}$, $N \geq 1$. Calculer l'espérance et la variance de X. Commenter.

Exercice 35. Soit X la v.a. représentant le poids (en Kgs) et Y la v.a. représentant le montant du patrimoine (en Keuros) d'un individu dans la ville de Monaco le 21 mai 2016. A votre avis, quel est le terme le plus grand entre $\frac{\mathbb{V}(X)}{[\mathbb{E}(X)]^2}$ et $\frac{\mathbb{V}(Y)}{[\mathbb{E}(Y)]^2}$? Même question en remplaçant Monaco par Asmara.

Exercice 36. Montrer par un contre-exemple que la variance n'est pas une application linéaire. L'écart type est-il une application linéaire ?

Exercice 37. Soit X une variable à valeurs dans $\{0, \ldots, N\}$, $N \geq 1$. Montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}\{X > k\}.$$

Exercice 38. Soit X une v.a. strictement positive sur $(\Omega, \mathbb{P})$. Montrer que

$$\mathbb{E}(X) \geq 1/\mathbb{E}(X^{-1}).$$

On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.