FEUILLE DE TD NUMÉRO 2

PROBABILITÉS DISCRÈTES

Tous les exercices de cette feuille sont à faire, et seront considérés comme traités, même s'ils ne le sont pas durant les séances de TD. Vous pouvez (et êtes encouragés à) poser des questions aux chargés de TD ou au chargé de cours (mais pas la semaine précédent les partiels/examens et en évitant l'usage intempestif du mail).

1. Dénombrabilité

Exercice 1. Rappeler la définition d'ensemble dénombrable (ou discret).

Exercice 2. Parmi les ensembles suivants, préciser (en le justifiant) lesquels sont dénombrables infini, finis ou non dénombrables : $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}^{36}$, l'ensemble des entiers naturels divisbles par 54, l'ensemble des applications à valeurs dans $\{0,1\}$, l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$, l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des applications de $\mathbb{Q}$ dans $[0,1]$, l'ensemble des applications de $\mathbb{Q}$ dans $\{0,1\}$, l'ensemble des entiers relatifs pairs.

2. Séries

Exercice 3. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses ?

1. Une suite croissante converge toujours vers une limite finie.
2. Une suite décroissante positive converge toujours vers une limite finie.
3. Si une suite positive $(u_n)_n$ est majorée par une suite décroissante $(v_n)_n$ alors $(u_n)_n$ converge vers une limite finie.
4. Une suite croissante converge toujours vers une limite finie ou vers $+\infty$.
5. Si $(u_n)_n$ est encadrée par deux suites qui convergent toutes deux vers la même limite finie alors $(u_n)_n$ converge vers une limite finie.

Exercice 4. Quand dit-on que la série de terme général $a_n \geq 0$ est convergente ? Que désigne la notation $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$?

Exercice 5. Parmi les séries suivantes, lesquelles sont convergentes (on justifiera) ?

1. $\sum_{n\geq 0} \dfrac{n}{n+1}$.
2. $\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{n+2}$.
3. $\sum_{n\geq 3} \frac{n+1}{3^n}$.
4. $\sum_{n\geq 0} \frac{n!}{[(2n+1)!]^2}$.
5. $\sum_{n\geq 1} \frac{2n+3/n}{n^\pi}$.

Exercice 6. Calculer les sommes des séries suivantes en montrant leurs convergences

1. $\sum_{n\geq 0}(n+1)3^{-n}$.

2. $\sum_{n\geq 0} \dfrac{n}{n^4+n^2+1}$ (décomposer en éléments simples la fraction rationnelle).

3. $\sum_{n\geq 3} \dfrac{2n-1}{n^3-4n}$ (décomposer en éléments simples la fraction rationnelle).

3. Probabilités d'événements

Ici, $(\Omega, \mathbb{P})$ désigne un espace de probabilité dénombrable.

Exercice 7. Donner la définition d'une probabilité sur un espace dénombrable infini Ω ainsi que le théorème de caractérisation par ses poids.

Exercice 8. Soit une suite $(A_n)_{n\geq 1}$ d'événements.

1. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(\bigcup_{k=1}^n A_k\big) = \mathbb{P}\big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\big)$. (Commencer par vérifier que le membre de gauche est bien défini.)
2. En déduire que $\mathbb{P}\big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\big) \leq \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n)$. (Remarquer le membre de droite a toujours un sens, même si la série ne converge pas.)

Exercice 9. Soit une suite $(A_n)_{n\geq 1}$ d'événements.

1. Montrer que $\big(\bigcap_{n\geq 1} A_n\big)^{\complement} = \bigcup_{n\geq 1} A_n^{\complement}$.
2. On suppose que la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, i.e. $A_{n+1} \subset A_n$, $n \geq 1$. Que peut-on dire de la suite $(A_n^{\complement})_{n\geq 1}$? En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\big(\bigcap_{n\geq 1} A_n\big)$.

Exercice 10. Donner un exemple d'espace (dénombrable) et de suite $(A_n)_{n\geq 1}$ d'événements tels que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(A_n\big) \neq \mathbb{P}\big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\big)$. (Remarquer au passage que le membre de gauche n'existe pas nécessairement.)

Exercice 11. Montrer qu'il n'est pas possible de trouver une mesure de probabilité sur $\mathbb{N}$ sous laquelle tous les singletons aient la même masse.

4. Loi de variable aléatoire

Ici, $(\Omega, \mathbb{P})$ désigne un espace de probabilité dénombrable.

Exercice 12. Qu'appelle-t-on loi d'une variable aléatoire X discrète ? On la notera $\mathbb{P}_X$.

Exercice 13. Soit X une loi géométrique de paramètre $1 - \exp(-1)$ sur $\mathbb{N}^*$. Calculer la loi de $\exp(-X+1)$

Exercice 14. On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire X la fonction

$$F_X : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{P}\{X \leq t\}.$$

Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes alors on a $F_X = F_Y$ si et seulement si $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$.

Exercice 15. Soit X une loi géométrique de paramètre $1 - \exp(-1)$ sur $\mathbb{N}^*$. Calculer et tracer la fonction de répartition de $\exp(-X+1)$. Que peut-on observer ?

Exercice 16. On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire X la fonction

$$F_X : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{P}\{X \leq t\}.$$

1. Calculer la fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}^*$.

2. On suppose que p s'écrit sous la forme $p = \lambda/N$ avec $\lambda > 0$ fixé et N entier naturel très grand. Montrer que, pour tout $t \geq 0$
$$F_X(tN) \to 1 - \exp(-\lambda t).$$

Exercice 17. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathbb{P})$.

1. Montrer que $\bigcap_{n\geq 1}\{X \geq n\} = \emptyset$.
2. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\{X \geq n\} = 0$.
3. On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire X la fonction $F_X : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{P}\{X \leq t\}$. Montrer que F_X tend vers 1 lorsque t tend vers l'infini.
4. Sur le même modèle, donner la limite en $-\infty$.

5. Espérance et Variance

Ici, $(\Omega, \mathbb{P})$ désigne un espace de probabilité dénombrable.

Exercice 18. Rappeler ce qu'on appelle formule de transfert pour une variable aléatoire discrète X.

Exercice 19. Montrer que si X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1]$ alors X et X^2 sont intégrables. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 20. Montrer que si X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ alors X et X^2 sont intégrables. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 21. Soit X une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1]$.

1. Préciser les valeurs de θ pour lesquelles θ^X est intégrable et calculer dans ce cas $\mathbb{E}(\theta^X)$.
2. Préciser les valeurs de θ pour lesquelles θ^X est de carré intégrable et calculer dans ce cas $\mathbb{V}(\theta^X)$.