FEUILLE DE TD NUMÉRO 3

CONDITIONNEMENT ET INDÉPENDANCE

Tous les exercices de cette feuille sont à faire, et seront considérés comme traités, même s'ils ne le sont pas durant les séances de TD. Vous pouvez (et êtes encouragés à) poser des questions aux chargés de TD ou au chargé de cours (mais pas la semaine précédent les partiels/examens et en évitant l'usage intempestif du mail).

Dans les exercices d'application, on prendra soin de décrire soigneusement la modélisation mathématique choisie si elle n'est pas clairement explicitée dans l'énoncé, à savoir l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ *choisi et éventuellemt les variables aléatoires considérées, leurs lois, et leurs dépendances mutuelles.*

1. Probabilités conditionnelles

Exercice 1. Rappeler la formule des probabilités totales et en déduire la formule de Bayes (que l'on rappellera).

Exercice 2. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace au plus dénombrable. Etant donnés $n+1$ événements $A_1, \ldots, A_{n+1}$, $n \geq 1$, tels que $\mathbb{P}(\cap_{i=1}^n A_i) > 0$, montrer que

$$\mathbb{P}\big(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\big) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\ldots\mathbb{P}(A_{n+1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n).$$

Exercice 3. On lance deux dés. Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux donne 6 sachant que les deux dés affichent des résultats différents ?

Exercice 4. Un lot de 100 dés contient 25 dés pipés dont la probabilité de sortie du 6 est 1/2 au lieu de 1/6. Un dé est choisi au hasard et lancé : il donne 6. Quelle est la probabilité qu'il soit pipé ?

Exercice 5. Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. Une boule est tirée au hasard de manière uniforme et est remplacée dans l'urne par $d+1$ boules de la même couleur. Quelle est la probabilité que la seconde boule tirée (à nouveau de manière uniforme) soit rouge ? Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit rouge sachant que la seconde tirée est rouge ?

Exercice 6. Une usine fabrique des pièces, avec une proportion de 0,05 de pièces défectueuses. Le contrôle de fabrication est tel que : (a) si la pièce est bonne, elle est acceptée avec la probabilité 0,96 (b) si la pièce est mauvaise, elle est refusée avec la probabilité 0,98. Une pièce est sélectionnée au hasard de manière uniforme et contrôlée. Quelle est la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle ? Quelle est la probabilité qu'une pièce soit mauvaise sachant qu'elle est acceptée ?

Exercice 7. Dans une famille de deux enfants, quelle est la probabilité que le cadet soit une fille sachant que l'aîné est un garçon ? Sachant que l'un des deux est un garçon, quelle est la probabilité que l'autre soit une fille ?

Exercice 8. (On pourra utiliser l'exercice précédent.) Lorsque le téléphone sonne dans une famille de deux enfants composée exactement d'une fille et un garçon, la fille répond, en l'absence des parents, avec probabilité p. Les « Dupond » ont deux enfants. Ils les ont laissés seuls pour la soirée.

Le téléphone sonne. Une fille décroche l'appareil. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?

Exercice 9. Dans cet exercice, nous supposons pour simplifier que les yeux d'un être humain sont soit de couleur bleue soit de couleur marron. Le gène de la couleur bleue est supposé récessif : il faut l'avoir hérité des deux parents pour qu'il soit effectivement exprimé. Le « génotype » correspondant s'écrit « bb ». Les autres s'écrivent « Mb » et « MM ».

1. La soeur de Martin Dupont a les yeux bleus, mais ses parents les yeux marrons. Quelle est la probabilité que Martin Dupont aient les yeux bleus ?
2. La femme de Martin Dupont a également les yeux bleus. Quelle est la probabilité que leur deuxième enfant aient les yeux bleus sachant que leur premier a les yeux marrons ?

Exercice 10. Le restaurant parisien « Chez Septime » reçoit une grosse livraison de boîtes d'oeuf frais avant la réception du Président Novalès, chef d'un Etat Sud Américain. Son patron, Monsieur Septime, estime lors de la réception que deux pourcents des boîtes sont abimées. Il accepte la livraison moyennant réduction de son prix tout en sachant que

1. $2/3$ des boîtes abimées contiennent au moins un oeuf cassé,
2. 98% des boîtes non-abimées ne contiennent pas d'oeufs cassés.

Un apprenti cuisinier range une boîte d'oeufs lorsqu'il est surpris par Monsieur Septime avec un oeuf cassé dans la main. De réputation colérique, le patron s'en prend à son employé et le menace de déduire l'oeuf de sa paie. En réalité innocent, l'employé s'apprête à désigner la boîte du bout des doigts pour plaider sa bonne foi : quelle est la probabilité que celle-ci soit effectivement abîmée ?

Exercice 11. Une compagnie d'assurance répartit ses assurés en trois catégories : conducteur à faible risque, conducteur à risque moyen et conducteur à haut risque. Les statistiques de la compagnie indiquent que la probabilité d'accident sur une période de un an est 0,05, 0,15 et 0,30 selon la catégorie. Par ailleurs, la répartition des assurés est la suivante : 20% sont à bas risque, 50% à risque moyen et 30% à haut risque. Un assuré est choisi au hasard : quelle est la probabilité qu'il ait un accident au cours de l'année ? Sachant que l'assuré n'a pas eu d'accident lors de l'année écoulée, quelle est la probabilité qu'il soit à faible risque ?

Exercice 12. On se propose de démontrer par une méthode probabiliste la relation :

$$\sum_{p+q=n, p\geq 1, q\geq 1} pq = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}.$$

Pour cela, on va calculer de deux manières différentes la probabilité de tirer, sans remise et successivement, dans une urne contenant $n+1$ boules numérotées de 1 à $n+1$, trois boules d'indices croissants. On note A cet événement.

1. Calculer, pour tout (i, j, k) tel que $1 \leq i < j < k \leq n+1$, la probabilité conditionnelle de A sachant que l'ensemble des trois numéros obtenus est $\{i, j, k\}$. En déduire que $\mathbb{P}(A) = 1/6$.
2. Montrer, par dénombrement, que
$$\mathbb{P}(A) = \big[(n+1)n(n-1)\big]^{-1} \sum_{p+q=n, p\geq 1, q\geq 1} pq.$$
Conclure.

Exercice 13. Une boîte contient $k+1$ pièces. Pour la $i$ème pièce, la probabilité de montrer pile lors d'un jet est $(i-1)/k$. Une pièce est tirée au hasard et est ensuite lancée N fois, $N \geq 2$.

1. Quelle est la probabilité conditionnelle que le Nème lancer donne pile sachant que les $N-1$ premiers ont donné pile ? Quelle est la limite de cette probabilité lorsque k tend vers l'infini ?

2. On écrit $N = m+n$, pour deux entiers positifs non nuls m et n. Sachant que les n premiers lancers ont donné pile, quelle est la probabilité conditionnelle que les m suivants donnent également pile. Montrer que cette quantité tend vers $(n+1)/(n+m+1)$ lorsque k tend vers l'infini.

2. Evénements indépendants

Exercice 14. Considérons l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ muni de la probabilité uniforme et les événements

$$A = \{1, 2\},\ B = \{2, 3\},\ C = \{3, 4\}.$$

Montrer que A et B sont indépendants, B et C sont indépendants, A et C sont indépendants, mais que A, B et C ne sont pas indépendants.

Exercice 15. Considérons le lancer de deux dés et les événements :

$$\begin{aligned} A &= \{1, \ldots, 6\} \times \{1, 2, 5\}, \\ B &= \{1, \ldots, 6\} \times \{4, 5, 6\}, \\ C &= \{(i, j) \in \{1, \ldots, 6\}^2 : i + j = 9\}. \end{aligned}$$

Montrer que $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ mais que A et B ne sont pas indépendants, B et C ne sont pas indépendants, et que A et C ne sont pas indépendants.

Exercice 16. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité au plus dénombrable. Montrer que deux événements A et B sont indépendants si et seulement si $A^{\complement}$ et $B^{\complement}$ sont indépendants. Que dire dans le cas de n événements, $n \geq 3$?

Exercice 17. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité au plus dénombrable muni de trois événements A, B et C indépendants. Montrer que A est indépendant de $B \cup C$.

Exercice 18. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité au plus dénombrable.

1. Etant donnés n événements indépendants $A_1, \ldots, A_n$, $n \geq 2$, montrer que $\mathbb{P}(\cup_{k=1}^{n} A_k) = 1 - \prod_{k=1}^{n}(1 - \mathbb{P}(A_k))$.
2. Peut-on trouver une partition de Ω en n événements indépendants, $n \geq 2$, de même probabilité ?

Exercice 19. Une classe de CP compte 4 garçons et 6 filles. Elle est mélangée avec une classe de CE1 composée de 6 garçons et de n filles, $n \geq 0$. Les deux classes sont réunies dans une même salle. Un élève (garçon ou fille) est alors interrogé au hasard. Comment choisir n de sorte que les événements « l'élève est un garçon » et « l'élève est en CP » soient indépendants ?

Exercice 20. Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une au hasard et on considère les événements $A =$ « la boule tirée porte un numéro pair » et $B =$ « la boule tirée porte un numéro multiple de 3 ». Les événements A et B sont-ils indépendants ? Reprendre la question en remplaçant 12 par 13.

Exercice 21. Une urne contient M jetons numérotés de 1 à M. On tire successivement n jetons en remettant chaque fois le jeton tiré et en brassant bien. Donner la probabilité qu'aucun jeton ne soit tiré plus d'une fois.

Application : un groupe de n étudiants sont réunis dans une même salle. Quelle est la probabilité qu'au moins deux étudiants aient leur anniversaire le même jour. (On suppose qu'aucun n'est né le 29 février et que n est inférieur à 365.)

Exercice 22. Un signal est transmis le long de n relais montés en série. Pour simplifier, le signal est réduit à un 0 ou un 1. Chaque relais transmet le signal avec probabilité $0 < p < 1$ et le déforme, i.e. change 1 en 0 et 0 en 1, avec probabilité $1 - p$. Les relais fonctionnent indépendamment les uns des autres. Quelle est la probabilité que le chiffre transmis à l'arrivée soit le bon ? Décrire le comportement asymptotique de cette probabilité lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 23. Un signal périodique (de fréquence entière) est transmis depuis un récepteur jusqu'à un émetteur. La fréquence du signal de sortie peut malheureusement être différente de celle du signal d'entrée. Le problème est modélisé par l'espace produit $\Omega = (\mathbb{N}^*)^2$: la première coordonnée désigne la fréquence du signal d'entrée et la seconde la fréquence du signal de sortie. La fréquence du signal d'entrée est supposée aléatoire et la transmission est elle-aussi supposée soumise à des perturbations aléatoires. Les aléas sont répartis selon une probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω. Exprimer la probabilité que les signaux d'entrée et de sortie aient la même fréquence en fonction des poids $(p_n = \mathbb{P}(\{n, n\}))_{n \geq 0}$.

3. Variables aléatoires indépendantes

Exercice 24. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité au plus dénombrable muni de X et Y variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètres $p \in]0,1[$ et $q \in]0,1[$. Calculer la loi du produit XY. Calculer de deux façons $\mathbb{E}(XY)$.

Exercice 25. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité au plus dénombrable muni de X et Y variables aléatoires indépendantes de lois binomiales de paramètres (m, p) et (n, p), pour deux entiers m et n plus grands que 1 et un réel $p \in]0,1[$. Montrer que $X + Y$ suit une loi binomiale de paramètres $(m + n, p)$.

Exercice 26. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité au plus dénombrable muni de X et Y variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson de paramètres $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, donner la loi de $X + Y$.

Exercice 27. Deux joueurs jouent au jeu suivant : un dé à six faces est lancé suivi d'une pièce à pile ou face. Le joueur A gagne, en euro, le résultat du dé si la pièce tombe sur pile et perd, en euro, le résultat du dé si la pièce tombe sur face. Modéliser l'expérience et donner la loi du gain du joueur A.

Exercice 28. On procède à N lancers successifs d'une pièce déséquilibrée de paramètre de succès $0 < p < 1$. Donner la loi du nombre de succès.

Exercice 29. La durée de vie d'un composant électronique est modélisée comme suit. Toutes les Δ secondes, une pièce déséquilibrée de (petit) paramètre p est tirée à pile ou face. Si la pièce tombe sur 1, le composant tombe en panne ; sinon, il demeure en fonctionnement. Donner la loi du premier instant de panne du composant.

Exercice 30. Une urne contient n boules rouges et $N - n$ noires. On tire, sans remise, p boules parmi les N. Donner la loi du nombre de boules rouges tirées.

Exercice 31. En considérant l'espace produit $\{0,1\}^N$, donner une modélisation du lancer de N pièces déséquilibrées de paramètre $p \in (0,1)$. Donner alors la loi de la variable aléatoire :

$$T : \omega = (\omega_1, \dots, \omega_N) \in \{0,1\}^N \mapsto \begin{cases} k & \text{si } \omega_1 = \cdots = \omega_{k-1} = 0 \text{ et } \omega_k = 1, \\ N+1 & \text{si } \omega_1 = \cdots = \omega_N = 0. \end{cases}$$

Que représente T ?

Exercice 32. Un joueur de casino parie à la couleur sur une roulette : le gain potentiel est égal à la mise. Le joueur mise, à chaque coup, la même somme. La probabilité de gagner est notée p.

1. Donner la probabilité que le gain total, au bout de $2n$ coups (n entier naturel), soit nul.
2. On rappelle la formule de Stirling : $N! \sim \sqrt{2\pi N}(N/e)^N$. Montrer que la probabilité que le gain, au bout de $2n$ coups, soit nul est équivalente, pour n grand, à $\big(4p(1-p)\big)^n/\sqrt{\pi n}$.

Exercice 33. Etant donnés un entier $n \geq 1$ et un réel $0 < p < 1$, nous considérons l'ensemble $\Omega = \{0,1\}^n$ muni de la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ définie par

$$\mathbb{P}\{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)\} = p^{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i}(1-p)^{n - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i}, \quad \varepsilon_i \in \{0,1\}.$$

Nous considérons également les variables aléatoires

$$X_i : (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \mapsto \varepsilon_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Vérifier que les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes.

Exercice 34. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité au plus dénombrable muni de $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $0 < p < 1$, donner la loi de $S = \sum_{i=1}^n X_i$.

Exercice 35. Calculer de deux façons l'espérance d'une loi binomiale de paramètres $n \geq 1$ et $p \in [0, 1]$:

1. en utilisant la relation d'absorption $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$, $1 \leq k \leq n$,
2. en écrivant une variable de loi binomiale comme la somme de variables de Bernoulli.

Exercice 36. Dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N, on tire avec remise n boules successives. Le numéro de la plus grande boule tirée est modélisé par une variable aléatoire X :

1. Calculer $\mathbb{P}\{X > k\}$, pour $k \in \{0, \ldots, N-1\}$. En déduire l'espérance de X. On rappelle que (cf TD 1) $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}\{X > k\}$.
2. Donner la loi de X.

Exercice 37. Un joueur a $2^N - 1$ euros en poche, $N \geq 1$, et joue sur rouge/noir au casino. (La probabilité de gain est supposée égale à $1/2$.) Au premier coup, il mise un euro sur le noir. Si le noir sort, il empoche, en plus de sa mise, un euro et arrête de jouer. S'il perd, il rejoue en misant deux euros sur le noir. S'il gagne lors cette deuxième mise, il empoche, en plus de ses trois euros de mise, un euro et arrête de jouer. S'il perd, il rejoue en doublant sa mise, i.e. en misant quatre euros sur le noir. Et ainsi de suite...

1. Expliquer pourquoi le joueur est sûr de pouvoir jouer N fois.
2. Les issues des N lancers rouge/noir sont modélisés par N variables aléatoires de Bernoulli $X_1, \ldots, X_N$. Décrire à partir de $X_1, \ldots, X_N$ l'événement : « le joueur perd toute sa fortune au bout des N lancers ». Calculer sa probabilité.
3. On désigne par S le gain algébrique empoché par le joueur au bout des N lancers. Montrer qu'il vaut 1 ou $-2^N + 1$. Donner la loi de S.
4. Calculer l'espérance de S. Commenter.

Exercice 38. Une chaîne de frabrication produit des objets qui peuvent être défectueux, selon les hypothèses de modélisation suivantes :

1. la chaîne produit en une heure un nombre aléatoire Y d'objets, Y à valeurs dans $\{0, \ldots, N\}$, $N \geq 1$,
2. chaque objet produit a une probabilité $p = 1/10$ d'être défectueux, indépendamment de tous les autres.

Le nombre d'objets défectueux produits en une heure par la chaîne de fabrication est modélisé par une variable aléatoire X.

1. Pour deux entiers $k, n \geq 0$, calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}\{X = k | Y = n\}$. (Bien distinguer les cas $k \geq n$ et $k > n$.)
2. Quelle est l'espérance de X sous la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(\cdot | Y = n)$, i.e. l'espérance de la loi conditionnelle de X sachant $Y = n$?
3. En déduire que $\mathbb{E}(X) = p\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 39. On s'intéresse au nombre de boîtes vides lors du lancer de n balles dans N boîtes, les lancers étant uniformes et indépendants les uns des autres. L'univers retenu pour la modélisation est l'ensemble $\Omega = \{1, \dots, N\}^n$ muni de la probabilité uniforme, notée $\mathbb{P}$. Dans la suite, on note X_i le numéro de la boîte dans laquelle la balle i tombe, Y_k le nombre de balles tombées dans la boîte k, Z_k la variable de Bernoulli valant 1 si la boîte k est vide et V le nombre de boîtes vides.

1. Montrer que les $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ sont indépendantes.
2. Exprimer l'événement $\{Y_k = s\}$, $1 \leq k \leq N$, à l'aide des variables $(X_i)_{1\leq i\leq n}$. En déduire la loi de Y_k et en particulier la valeur de $\mathbb{P}\{Y_k = 0\}$.
3. Exprimer Z_k à l'aide de Y_k. Quelle est la loi de Z_k ? Les $(Z_k)_{1\leq k\leq N}$ sont-elles indépendantes ? Exprimer V à l'aide des $(Z_k)_{1\leq k\leq N}$.

Exercice 40. Trois joueurs A, B et C jettent une pièce (équilibrée) à tour de rôle jusqu'à ce que Pile apparaisse : le joueur qui a obtenu le « Pile » est alors déclaré vainqueur. L'univers Ω peut être décrit par l'ensemble des vecteurs composés de 0 et d'un 1, le 1 étant situé en queue de vecteur, i.e. (1), $(0, 1)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 0, 0, 1)$ et ainsi de suite.

1. Expliquer le choix de Ω. Donner la probabilité des singletons.
2. Décrire comme parties de Ω les événements suivants : A= « A gagne » et B= « B gagne ». Comment interpréter $(A \cup B)^{\complement}$?
3. On note X le nombre de coups nécessaires pour que A gagne avec $X = +\infty$ si A ne gagne pas. Décrire, pour tout entier k, l'événement $\{X = 3k + 1\}$ et en déduire la loi de X. (On précisera la probabilité que X vaille l'infini.) Reproduire le même travail avec Y, modélisant le nombre de coups nécessaires à la victoire de B. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

4. Espérance et indépendance

Exercice 41. Soit $X_1, \dots, X_n \dots$ des v.a. i.i.d. telles que pour tout $\lambda > 0$, $F(\lambda) = \mathbb{E}(e^{\lambda X_1})$ existe. Exprimer $\mathbb{E}(\exp\{\lambda(\frac{X_1+\dots+X_n}{n})\})$ en fonction de la fonction F et de n.

Exercice 42. Soit X et Y deux v.a. indépendantes de lois géométriques de paramètre $p \in]0, 1[$ et $q \in]0, 1[$ respectivement. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, calculer, quand c'est possible, $\mathbb{E}[\theta^{X+Y}]$.

Exercice 43. Etant donnée une variable aléatoire X, on appelle fonction génératrice de X la fonction

$$\forall s \in [0, 1], \quad G_X(s) = \mathbb{E}[s^X].$$

1. Montrer que $G_X(s)$ est bien définie pour tout $s \in [0, 1]$.
2. Calculer $G_X(s)$ pour X de loi binomiale de paramètres $n \geq 1$ et $p \in [0, 1]$, puis pour X de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
3. Montrer que $G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)$, $s \in [0, 1]$, si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes.
4. On suppose que X prend un nombre fini de valeurs. Montrer que G_X est dérivable en 1 : que vaut $G'_X(1)$?

Exercice 44. Un joueur décide d'aller jouer sur rouge/noir à la roulette d'un casino (probabilité 18/37 de gagner en raison du zéro) en s'imposant la règle suivante : une fois arrivé devant la table de jeu, il tirera uniformément au hasard entre 1 et N le nombre de coups qu'il jouera.Le nombres de coups à jouer est modélisé par une variable aléatoire T et les issues des N lancers rouge/noir auquel le joueur participera éventuellement sont modélisés par N variables $X_1, \dots, X_N$ à valeurs dans $\{0, 1\}$. A chaque partie il mise 1 euro (il peut donc soit gagner 1 euro où perdre 1 euro à chaque partie).

1. Montrer que le gain du joueur s'écrit sous la forme

$$G = \sum_{i=1}^{T} (2X_i - 1).$$

2. En décomposant T comme une combinaison d'indicatrices, calculer $\mathbb{E}(G)$ et $\mathbb{V}(G)$.

Exercice 45. Démontrer que la variance de la somme de n variables aléatoires indépendantes de carré intégrable est égale à la somme des n variances. En déduire la variance d'une loi Binomiale de paramètre (n, p).

Exercice 46. A la sortie d'un restaurant, le garçon remet, à n hommes venus déjeuner ensemble, leurs chapeaux au hasard. Les clients sont numérotés de 1 à n : pour le client i, on désigne par X_i la variable aléatoire valant 1 si le chapeau distribué est le bon et 0 sinon. Le nombre de chapeaux correctement distribués est $S = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Donner la loi de chaque X_i. En déduire l'espérance de S.
2. Donner la valeur de $\mathbb{E}(X_i X_j)$ pour $i \neq j$. En déduire la variance de S.