FEUILLE DE TD NUMÉRO 4

PROBABILITÉS SUR UN ESPACE GÉNÉRAL
VARIABLES ALÉATOIRES À DENSITÉ

Tous les exercices de cette feuille sont à faire, et seront considérés comme traités, même s'ils ne le sont pas durant les séances de TD. Vous pouvez (et êtes encouragés à) poser des questions aux chargés de TD ou au chargé de cours (mais pas la semaine précédent les partiels/examens et en évitant l'usage intempestif du mail).

Ici, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilsé muni d'une tribu $\mathcal{F}$.

1. Loi d'une variable continue

Exercice 1. Quand dit-on qu'une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est à densité ?

Exercice 2. Calculer la fonction de répartition d'une variable aléatoire X de loi uniforme sur $]0, 1[$. Quelle est la probabilité que X soit dans l'intervalle $]1/4, 3/4[$, dans l'intervalle $[1/2, 3]$, dans l'intervalle $] - 5, 1/3]$?

Exercice 3. Calculer la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Exercice 4. Etant donnée une variable aléatoire X de loi uniforme sur $]0, 1[$, donner la loi de la variable $\lambda X + \mu$ pour λ et μ deux réels.

Exercice 5. Etant donnée une variable aléatoire X de loi exponentielle de paramètre 1, donner la loi de $\lambda^{-1}X$, pour λ réel strictement positif.

Exercice 6. Etant donnée une variable aléatoire X de loi gaussienne centrée réduite, donner la loi de $m + \sigma X$, pour m réel et σ réel strictement positif.

Exercice 7. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]-\pi/2, \pi/2[$. Calculer la loi de $\tan(U)$. (Même méthode que dans les exercices précédents.)

2. Calcul d' Espérances et de Variances

Exercice 8. Rappeler la formule de transfert pour les variables aléatoires à densité.

Exercice 9. Calculer l'espérance et la variance de la loi uniforme $\mathcal{U}_{[a,b]}$ sur le segment $[a, b]$, $a < b$.

Exercice 10. Calculer l'espérance et la variance de la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

Exercice 11. Calculer l'espérance et la variance d'une loi gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $m \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$.

Exercice 12. On considère X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Pour $n \geq 1$, calculer $\mathbb{E}[X^n]$.

Exercice 13. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$. Calculer $\mathbb{E}[\exp(X/2)]$ et $\mathbb{E}[\sin(X)]$.

Exercice 14. Soit X une variable aléatoire de loi gaussienne centrée réduite. Calculer $\mathbb{E}[\exp(X)]$.

Exercice 15. On considère X une variable aléatoire de loi gaussienne centrée réduite. Pour $n \geq 1$, on pose

$$I_n = \mathbb{E}[X^n].$$

1. Montrer que $I_n = 0$ si n est impair.
2. Montrer, pour n quelconque, que
$$I_{n+2} = (n+1)I_n.$$
En déduire que, pour $k \geq 1$,
$$I_{2k} = (2k-1)(2k-3)\dots 1 = \frac{(2k)!}{2^k k!}.$$

3. Processus de Poisson

Exercice 16. On rappelle (cours) que si X, Y sont des v.a. indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de densité f et g alors pour toutes fonctions φ, ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$\mathbb{E}(\varphi(X)\psi(Y)) = \mathbb{E}(\varphi(X))\,\mathbb{E}(\psi(Y))$$

dès que les espérances sont bien définies.

1. Rappeler le théorème de Fubini (cours de calcul différentiel 1).
2. Montrer que
$$\mathbb{E}(\varphi(X)\psi(Y)) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x)\psi(y)\, f(x)g(y)dxdy.$$
3. Proposer en argumentant (on ne demande pas de démontrer) une formule sous forme d'une intégrale double pour $\mathbb{E}(G(X,Y))$ où G est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
4. En déduire que la loi de $X+Y$ est une v.a. à densité de densité h donnée par
$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy.$$
5. Généraliser au cas de n v.a. à densité indépendantes.

Exercice 17. Dans cet exercice on admet les résultats de l'exercice précédent.

Soit $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ des v.a. i.i.d. exponentielles de paramètre $\lambda > 0$ sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On définit

$$T_0 = 0, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad n \geq 1$$

et

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad N_t = \sup\{n \geq 0\ ;\ X_n \leq t\}$$

avec la convention que $\sup \emptyset = \infty$. La séquence de v,.a. $(N_t)_{t\geq 0}$ s'appelle un *processus de Poisson* d'intensité $\lambda > 0$. Les v.a. $(T_n)_{n\geq 0}$ sont appellées les temps de sauts du processus de Poisson.

1. Rappeler et redémontrer la propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle.
2. Montrer par récurence, en écrivant $T_n = T_{n-1} + X_n$ et les résultas de l'exercice précédent, que T_n suit une loi de densité f_{T_n} donnée par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{T_n}(x) = \frac{1}{(n-1)!}\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x).$$
3. Dessiner une réalisation du processus $(N_t)_{t\geq 0}$, i.e. une trajectoire $t \to N_t(\omega)$ pour un $\omega \in \Omega$ typique. Expliquer pourquoi on appelle $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de sauts.

4. Remarquer que $\{N_t = n\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\}$ et déduire de la question précédente que pour tout $t \geq 0$, N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt. En déduire en particulier que pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{P}(N_t = \infty) = 0$.
5. On pose $X_1^t = T_{N_t+1} - t$ le temps restant apès t jusqu'au prochain saut. Soit, pour $k \geq 2$, $X_k^t = X_{N_t+k}$ et $T_k^t = X_1^t + \ldots + X_k^t$ pour $k \geq 1$, $T_0^t = t$.
   a. Faire un graphique représentant ces différentes v.a..
   b. Montrer que
   $$\forall x \geq 0, \quad \mathbb{P}(X_1^t > x | N_t = n) = e^{-\lambda x}.$$
   c. Généraliser en calculant
   $$\mathbb{P}(X_1^t > x_1, X_2^t > x_2, \ldots, X_k^t > x_k | N_t = n)$$
   d. On admet que si $Y_1, \ldots, Y_k$ sont des v.a. réelles telles que pour tout réels $y_1, \ldots, y_k$,
   $$\mathbb{P}(Y_1 > y_1, \ldots, Y_k > y_k) = \mathbb{P}(Y_1 > y_1) \ldots \mathbb{P}(Y_k > y_k)$$
   alors $(Y_1, \ldots, Y_k)$ sont indépendantes. Montrer alors que sous la probabilité $\mathbb{P}(\cdot | N_t = n)$, les v.a. sont i.i.d. de loi exponentielles de paramètre λ.
6. Montrer que si $s \leq t$ et $n \geq 0$ alors
   $$\{N_{t+s} - N_t = n\} = \{T_n^t \leq s < T_{n+1}^t\}.$$
   et déduire des questions précédente que $N_{t+s} - N_t$ suit la même loi que N_s.